

***The extension of P.O.D. to complex system with  
non-homogenous boundary conditions, application  
to a turbulent pulsed jet.***

Guillaume VIGO

**N° 3945**

Mai 2000

THÈME 4



***apport  
de recherche***



# The extension of P.O.D. to complex system with non-homogenous boundary conditions, application to a turbulent pulsed jet.

Guillaume VIGO \*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet SINUS et Dassault Aviation

Rapport de recherche n° 3945 — Mai 2000 — 61 pages

**Abstract:** The Proper Orthogonal Decomposition (or **P.O.D.**) provides a new approach for the simulation of unsteady flows. In a preliminary phase, a classical approach is used to compute a set of typical solutions of the P.D.E., snapshots are stored and used to derive a basis. Galerkin projection on this basis leads to a low order O.D.E. which is used to simulate at extremely reduced cost, new similar flow configurations or longer time periods. In a previous work, the author demonstrated the feasibility of POD-based simulation for laminar compressible unsteady flows with space discretisation based on unstructured meshes. The work that is presented in the paper includes first an extension of our previous work to unsteady *turbulent* flows modeled by the Spalart-Allmaras turbulence model. Next, the extension of the method to the treatment of *inhomogenous Dirichlet boundary conditions* is described. This allows the P.O.D. based simulation of *pulsed jets*. The paper also demonstrates the capability of P.O.D. based approaches to simulate pulsed jets flows over a certain range of frequency and mass flow parameters. Finally, the O.D.E. system resulting from projection on the P.O.D. basis is considered as a (non linear) representative

\* E-mail : vigo-guillaume@dassault-aviation.fr

dynamic system for *flow control*. An examples of application to flow control complete the paper.

**Key-words:** P.O.D. - compressible flow - unstructured mesh - finite elements  
- turbulence - pulsed jets.



# Extension de la P.O.D. à des système complexes avec conditions aux bords non-homogènes, application aux jets pulsés turbulent.

**Résumé :** Les méthodes basées sur la décomposition orthogonale propre (ou P.O.D.) sont des approches nouvelles pour simuler les écoulements instationnaires. Dans une phase préliminaire, une approche classique doit être utilisée pour générer un échantillon de solutions de l'E.D.P., ces clichés sont alors stockés et utilisés pour créer une base. Une projection de Galerkin de l'E.D.P. sur cette base conduit à une E.D.O. de faible dimension qui permet de simuler à très faible coût : d'autres écoulement dans des configurations proches, ou des périodes de temps plus longues. Dans des précédents travaux, on a démontré la faisabilité de la simulation P.O.D. d'écoulements instationnaires laminaires compressibles basés sur une discrétisation par maillage non structuré. Le travail, présenté dans ce rapport, inclut une extension de notre travail aux écoulements instationnaires *turbulents* modélisés par le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras. Puis, une extension de la méthode au traitement des *conditions aux bords de Dirichlet non homogène* sera décrite. Cela permet de faire des simulations numériques des jets pulsés. Ce rapport démontre aussi la capacité des méthodes basées sur la P.O.D. de simuler les écoulements issus de jets pulsés sur une certaine gamme de fréquences et de débits, même si les clichés stockés correspondent à un nombre limité de ces paramètres. Enfin, le système d'E.D.O. résultant de la projection sur la base P.O.D. est considéré comme un système dynamique (non linéaire) à contrôler.

**Mots-clés :** P.O.D. - écoulement compressible - maillage non structuré - éléments finis - turbulence - jets pulsés.

# 1 Introduction

La mise au point à l'aide de codes numériques de stratégie de contrôle d'écoulement par des jets pulsés conduit à des coût de calcul vite prohibitifs si des modèles Navier-Stokes sont appliqués. L'objectif des présents travaux est d'étudier des méthodes basées sur la P.O.D. beaucoup moins coûteuse. Les approches P.O.D. nécessitent de calculer au préalable, avec une méthode classique, une configuration d'écoulement instationnaire. Un certain nombre de solutions instantanées sont stockées, ces "clichés" sont utilisés pour définir, par calcul de modes propres d'une matrice de corrélation, une base. Une projection de Galerkin est ensuite effectuée pour transformer les équations de Navier Stokes compressibles en une équation différentielle ordinaire (E.D.O.) de faible dimension. Cette approche a été étudiée initialement pour les équations de Navier-Stokes incompressibles en particulier par Peraire *et al.* [1], une extension aux équations de Navier Stokes compressible a été décrite dans un précédent rapport INRIA [2] (voir aussi ECCOMAS 98 [3]). L'E.D.O. est ensuite utilisée pour simuler, pour un coût réduit, soit un temps plus long, soit des conditions d'écoulement proches. L'E.D.O. peut constituer un système dynamique représentatif non linéaire que l'on peu chercher à contrôler.

L'utilisation de jets pariétaux présente des caractéristiques intéressantes pour interagir avec une configuration d'écoulement : le rotationnel créé par le jet peut être défini pour interagir avec celui de l'écoulement et le jet peut être pulsé à une fréquence adaptée. Les jets pulsés peuvent donc être envisagés pour le contrôle actif d'écoulements. On peut en particulier mentionner les jets synthétiques caractérisés par un débit moyen nul (Glezer et al. [5]). Une étude numérique et expérimentale de jets a été présentée par Kral [7].

Dans la première partie de ce rapport, nous rappellerons les étapes de la méthode utilisant une base issue d'une P.O.D. Dans une deuxième partie nous étendrons cette méthode aux écoulements instationnaires compressibles turbulents. Dans la troisième partie nous décrirons l'extension de la méthode pour traiter les conditions de Dirichlet non homogène. Ensuite, la simulation d'un jet pulsé sera effectuée en utilisant une approche par éléments finis associée

à un schéma trapézoïdal en temps. Un système dynamique utilisant une base P.O.D. sera défini dans la cinquième partie. Pour finir, la robustesse de l'approche P.O.D. sera testée sur une large plage de fréquences et de débits.

## 2 Rappel sur les méthodes utilisant une base P.O.D.

La P.O.D. ou Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres permet de construire des systèmes dynamiques représentatifs de phénomènes pour lesquels on dispose de réalisations instantanées. Cette méthode s'appuie sur une décomposition sur une base propre de modes définis à partir d'une sélection des valeurs propres de la matrice des corrélations temporelles d'un certain nombre de réalisations de l'écoulement.

On cherche une base discrète de l'écoulement  $u(x, t)$ ,  $x \in \Omega$  et  $t \in \mathbb{R}$  (avec  $\Omega$  le domaine spatial), permettant d'approximer toute réalisation spatio-temporelle  $u(x, t)$ , à partir d'un ensemble fini de clichés  $\{u_i(x), i \in [1, N], x \in \Omega\}$  (où  $N$  est le nombre de clichés).

On calcule la matrice de corrélation temporelle  $K$  des réalisations, telle que

$$K_{i,j} = (u_i, u_j), \quad (i, j) \in [1, N]^2,$$

où l'opérateur  $(., .)$  est un produit scalaire. Dans notre cas nous utilisons le produit scalaire  $L^2$  classique sur les variables primitives modifiées  $u = (\frac{1}{\rho}, u_1, u_2, p)$ . Les articles de Iollo [4] montre que l'utilisation du produit scalaire  $H^1$  peut être intéressant.

On extrait les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice de corrélation (par ordre décroissant et en supprimant la valeur propre nulle). Les vecteurs de la nouvelle base (appelés modes), orthogonaux entre eux, s'écrivent :

$$V_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} u_j,$$

où  $\alpha_{i,j}$  est la  $j^{eme}$  coordonnée du  $i^{eme}$  vecteur propre de  $K$ .

L'écoulement  $u(x, t)$  dans la nouvelle base est alors le suivant :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{M_v} y_k(t) V_k(x), \quad (1)$$

où

- $M_v$  est le nombre de modes P.O.D. retenus,
- $y_k(t)$  sont les coordonnées de  $u$  dans la nouvelle base, qui sont des coefficients purement temporels issus de la décomposition tels que  $y_k = (u, V_k)$  est la projection de  $u$  sur le  $k^{ieme}$  mode.

Une projection de Galerkin sur la nouvelle base est ensuite effectuée pour transformer les équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes en une équations aux dérivées ordinaires de faible dimension.

L'E.D.O. résultant des équations de Navier-Stokes est la suivante :

$$(y_n)_{,t} = \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l \mathbf{a}_{nkl}, \quad (2)$$

où les  $\mathbf{a}_{nkl}$  sont des coefficients obtenus via la méthode de Galerkin. La complexité d'une itération en temps de l'E.D.O. est de l'ordre de  $M_v^2$ .

Le travail déjà effectué (voir [2]) nous a montré la nécessité de rajouter un terme de stabilisation à cette équation qui devient :

$$(y_n)_{,t} = \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l \mathbf{a}_{nkl} + \sum_{k,l,m=1}^{M_v} y_k y_l y_m \mathbf{as}_{nklm} \quad (3)$$

où les  $\mathbf{as}_{nklm}$  sont les coefficients de stabilisation.

La complexité de la méthode P.O.D. stabilisée est malheureusement beaucoup plus importante (de l'ordre de  $M_v^3$ ).

### 3 Extension à la turbulence

#### Choix du modèle :

La plupart des écoulements liés aux processus industriels sont turbulents. Leur prédiction détaillée est rendue difficile par leur caractère 3D, multiéchelle et instable. La modélisation statistique est une tentative de prédire un comportement moyen (au sens statistique du terme). Introduit par Reynolds en 1895 et toujours utilisée. Ce procédé consiste à décomposer chaque grandeur en une composante moyenne et une fluctuation. On va alors considérer pour chaque variables un champ moyen et un champ fluctuant, on va ensuite moyenner les équations instantanées afin d'obtenir le système régissant l'écoulement moyen. Des inconnues supplémentaires, sous forme de corrélations doubles ou triples entre les composantes fluctuantes, apparaissent à cause de la non-linéarité des équations. L'information sur la turbulence nous est alors donnée par les fluctuations, qui n'apparaissent plus, dès lors, que sous forme de corrélations entre elles. Pour fermer le problème, c'est à dire obtenir autant d'équations que d'inconnues, des hypothèses simplificatrices sont alors nécessaires pour constituer un **modèle de turbulence**.

Il existe une grande variété de modèle de turbulence. On distingue en général les différentes méthodes de fermeture en fonction de leur complexité relative.

Les modèles les plus simples utilisent des relations purement **algébriques** pour spécifier les contraintes turbulentes. Ces modèle s'appuient sur le concept de **viscosité turbulente**, qui est calculée par le produit d'une échelle de longueur et d'une échelle de vitesse définies à partir des caractéristiques locales de l'écoulement (distance à la paroi, rotationnel...). La détermination de ces échelles est effectuée à l'aide de formules empiriques simples (modèles de Goertler, Prandtl [8], Cebeci-Smith [9], Baldwin-Lomax, ...).

Dans les modèles à **une équation de transport**, la détermination des contraintes de Reynolds nécessite l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. On considère généralement une équation de transport pour l'énergie

cinétique turbulente pour déterminer l'échelle de vitesse, et on exprime la viscosité turbulente en fonction de cette quantité (modèle de Prandtl-Kolmogorov). L'échelle de longueur étant obtenue encore une fois par la prescription d'une longueur de mélange.

Les modèles à **deux équations de transport**, comme le modèle  $k - \epsilon$  ou le modèle  $k - \epsilon^2$ , font intervenir deux équations aux dérivées partielles pour déterminer la viscosité turbulente. On utilise encore une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente et une deuxième équation, qui décrit le taux de dissipation turbulente  $\epsilon$ .

En fait, pour les modèles à deux équations, seule l'équation sur  $k$  vient directement de la physique ; la deuxième équation est empirique, on l'écrit par rapport à la variable choisie et sur le principe de la première équation, c'est-à-dire en considérant un terme de production, un terme de dissipation et un terme d'advection. Il est possible d'écrire une équation 'exacte' sur  $\epsilon$ , mais la complexité des termes la rend inadaptée tant pour la modélisation que pour le calcul numérique.

Les modèles précédents s'appuient tous sur la notion de viscosité turbulente. Ce concept est mis en défaut dans divers types d'écoulements, ce qui conduit à spécifier les contraintes turbulentes ou contraintes de Reynolds  $\tau_{i,j}^t = -\rho \overline{u_i u_j}$  (qui apparaissent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement) à l'aide d'un système complet d'équations de transport. On parle alors de modèles de fermeture au second ordre ou modèles R.S.M. ("Reynolds Stress Models"). Il existe aussi des modèles intermédiaires qui utilisent deux équations de transport et un ensemble de relations algébriques pour calculer les éléments du tenseur de Reynolds. Mais tous ces modèles nécessitent d'énormes capacités de calculs, on ne les utilisera pas.

Le plus simple serait d'utiliser des modèles algébriques. Malheureusement ces modèles ont un domaine d'application assez limité. Les modèles à deux équations eux sont plus coûteux en temps de calculs et en finesse de maillage.

On a donc décidé d'utiliser le modèle de Spalart-Allmaras [10]. Ce modèle est une tentative de trouver un modèle plus général que les modèles algébriques,

moins couteux que les modèles à deux équations, et ne dérivant pas du modèle  $k - \epsilon$ .

Le modèle de Spalart-Allmaras consiste en une équation pour la viscosité turbulente non amortie  $\bar{\nu}$ . L'équation de transport s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\nu}}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \bar{\nu} - \frac{1}{\sigma} \nabla (\bar{\nu} \nabla \bar{\nu}) - \frac{C_{b2}}{\sigma} \nabla \bar{\nu} \cdot \nabla \bar{\nu} = C_{b1} \bar{S} \bar{\nu} - C_{w1} f_w \left( \frac{\bar{\nu}}{d} \right)^2 \quad (4)$$

où :

$$\begin{aligned} - \bar{S} &= f_{v3} S + \frac{f_{v2} \bar{\nu}}{(\kappa d)^2}, \\ - S &= \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right|, \\ - f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \\ - f_{v2} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi}{C_{v2}}\right)^3}, \\ - f_{v3} &= \frac{1}{\chi} (1 + \chi f_{v1}) (1 - f_{v2}), \\ - \chi &= \frac{\bar{\nu}}{\nu}, \\ - f_w &= g \left( \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}, \\ - g &= r + C_{w2} (r^6 - r), \\ - r &= \frac{1}{\bar{S} \kappa^2 d^2}, \\ - d &\text{ distance a la peau,} \end{aligned}$$

avec les constantes :

$$\begin{aligned} - C_{b1} &= 0.1355, \\ - C_{b2} &= 0.622, \\ - \kappa &= 0.41, \\ - \sigma &= \frac{2}{3}, \\ - C_{w1} &= \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma}, \\ - C_{w2} &= 0.3, \end{aligned}$$



- $C_{w3} = 2$ ,
- $C_{v1} = 7.1$ ,
- $C_{v2} = 5$ .

#### Ajout de la turbulence au système P.O.D. de N.S. :

On va maintenant construire le système dynamique représentatif d'un écoulement turbulent, en appliquant aussi la P.O.D. à la viscosité turbulente. La viscosité  $\mu(t)$  se décompose en un terme de viscosité laminaire  $\mu_l$  et en un terme de viscosité turbulente  $\mu_t(t)$ .

On applique la P.O.D. à la viscosité turbulente  $\mu_t(t)$  d'où

$$\mu(t, x) = \mu_l + \sum_{p=1}^{M_t} z_p(t) (\mu_t)_p(x) \quad (5)$$

où

- $M_t$  est le nombre de modes turbulents retenus,
- $z_p(t)$  sont les coordonnées de  $\mu_t$  dans la nouvelle base, qui sont des coefficients purement temporels issus de la décomposition tels que  $z_p(t) = (\mu_t(t, x), (\mu_t)_p(x))$  est la projection de  $\mu_t$  sur le  $p^{eme}$  mode.

En utilisant les équations (1) et (5) dans les équations de Navier-Stokes, puis en effectuant une projection de Galerkin, l'E.D.O. résultant des équations de Navier-Stokes avec viscosité turbulente est la suivante :

$$(y_n)_{,t} = \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l \mathbf{a}_{nkl} + \sum_{p=1}^{M_t} \sum_{k,l=1}^{M_v} z_p y_k y_l \mathbf{b}_{nklp}. \quad (6)$$

où les  $\mathbf{a}_{nkl}$  sont les même coefficients que dans l'équation (3) (de la P.O.D. sans turbulence), et les  $\mathbf{b}_{nklp}$  les coefficients dépendant de la viscosité turbulente.

#### Système P.O.D. de Spalart-Allmaras :

On effectue maintenant une projection de Galerkin du modèle de turbulence choisi (dans notre cas le modèle de Spalart-Allmaras) sur la base de viscosité turbulente  $(\mu_t)_p$ . On obtient alors un système d'équations aux dérivées ordinaires sur la turbulence très complexe. Ce système ne peut pas se simplifier comme celui des équations de Navier-Stokes en raison du terme

$S = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right|$ . Pour le résoudre, il semble nécessaire de reconstruire les divers champs, puis de faire la projection de Galerkin sur les modes, on perd alors toute la rapidité de l'approche P.O.D. C'est pourquoi par la suite on ne prendra qu'un mode turbulent, le premier. Ce premier mode représente en fait la viscosité turbulente moyenne. Le coefficient  $z_1(t)$  qui lui est associé varie très peu au cours du temps, on le prendra donc constant. L'équation (6) est donc plus simple, la complexité d'une itération en temps et alors du même ordre que la méthode P.O.D. classique (ordre de  $M_v^2$ ).

### Application de la turbulence :

Cette section présente les résultats de la P.O.D. appliquée à un écoulement de Navier-Stokes compressible turbulent autour d'un profil d'aile NACA 0012 avec un nombre de Mach à l'infini de 0.2, un nombre de Reynolds de 100000, et  $20^\circ$  d'incidence. Le maillage utilisé pour la résolution de l'équation de Navier-Stokes, présenté sur la figure 1, comporte 8008 noeuds et 15794 éléments.

Autour de ce profil, après une phase transitoire de 2000 itérations à pas de temps local (le nombre de Courant Friedrichs Lewi, CFL est choisi uniforme et égal à 10), puis 18000 itérations à pas de temps global ( $\Delta t = 0.001s$ ) un écoulement périodique s'établit. Chaque période est discrétisée en 2200 pas de temps. La figure 2, présente les isovalues de la viscosité turbulente de l'écoulement tout au long d'une période. Cela permet de constater que l'écoulement comporte des détachements stationnaires de tourbillons.

Sur cette période, on prend un certain nombre de clichés à des intervalles de temps réguliers (toutes les 10 itérations). Les matrices de corrélation (classique et turbulente) et leurs valeurs propres sont calculés à partir de ces clichés (clichés sur les variables primitives ( $1/\rho, u, v, p$ ) et turbulente  $\mu_t$ ). On en déduit finalement les modes P.O.D. classique et les modes P.O.D. turbulent. La figure 3 montre les six premiers modes turbulent.

On présente maintenant les résultats de la P.O.D. avec **un** seul mode de viscosité turbulente, comparés avec la méthode sans turbulence. La figure 4 présente l'évolution au cours du temps du deuxième coefficient de l'E.D.O. de Navier-Stokes avec et sans turbulence. On voit clairement que la méthode avec turbulence suit mieux la courbe de référence que celle sans turbulence.

Les figures 5 et 6 qui présentent respectivement le coefficient du mode 3 en fonction du mode 2, et celui du mode 5 en fonction du mode 4 confirme ce résultat. Enfin la figure 7 permet de comparer l'erreur de reconstruction en norme infini entre la méthode de Navier-Stokes classique, la méthode de Navier-Stokes avec stabilisation et la méthode de Navier-Stokes avec turbulence. On peut constater que la méthode stabilisé et turbulente sont presque équivalentes, la méthode avec turbulence étant un peu meilleure, et de complexité moins inportante. La figure 8 permet de voir que la méthode avec turbulence et stabilisation marche encore mieux. Par la suite on utilisera toujours quand cela sera possible la P.O.D. avec turbulence et stabilisation.

## 4 Extension au cas des conditions aux limites de Dirichlet non homogène

L'objectif principal des présents travaux étant la mise au point de stratégie de contrôle d'écoulement complexe, il faut maintenant que les méthodes basées sur la P.O.D. prennent en compte des conditions aux bords variables au cours du temps. Les méthodes P.O.D. simples ne le permettent pas. Pour obtenir un système dynamique prenant en compte des conditions de Dirichlet non homogène, on introduit des nouveaux modes. Ces nouveaux modes  $V^w$  (appelés modes de contrôle par la suite) doivent être représentatifs des conditions aux bords et vont permettre de séparer les conditions de Dirichlet non homogène du reste de l'écoulement. Le champ  $V$  représentant l'écoulement, est donc approximé comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{M_v} y_k(t) V_k(x) + \sum_{s=1}^{M_w} w_s(t) V_s^w(x)$$

où

- les  $V_k$  sont les modes classiques calculés à partir de l'échantillons de clichés  $(U(x, t_i))_i$ , issus des clichés  $(u(x, t_i))_i$  de l'écoulement auxquels on a soustrait les conditions aux bords,

$$U(x, t_i) = u(x, t_i) - \sum_{s=1}^{M_w} w_s(t_i) V_s^w(x).$$

- $M_v$  est le nombre de modes classiques utilisés pour l'approximation,
- les  $y_k$  sont les coordonnées de l'écoulement  $V$  dans la base P.O.D.,
- les  $V_s^w$  sont les modes de contrôle tels que  $\sum_{s=1}^{M_w} w_s(t) V_s^w = u$  aux bords,
- $M_w$  est le nombre de modes de contrôle,
- les  $w_s$  sont les coefficients de contrôle.

L'écoulement  $u$  est obtenu par la résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned}
u_{,t} + \bar{A}_i u_{,i} + \bar{G}_i u_{,i} - (\bar{K}_{ij} u_{,j})_{,i} &= 0 \quad \text{sur } \Omega, \\
u &= \sum_{s=1}^{M_w} w_s(t) V_s^w \quad \text{a l'orifice.}
\end{aligned} \tag{7}$$

Le produit scalaire de (7) avec le  $n^{ieme}$  mode  $V_n$  est le suivant :

$$(u_{,t} + \bar{A}_i u_{,i} + \bar{G}_i u_{,i} - (\bar{K}_{ij} u_{,j})_{,i}, V_n) = 0,$$

qui peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
(u_{,t}, V_n) &+ (\bar{A}_i u_{,i}, V_n) + (\bar{G}_i u_{,i}, V_n) = ((\bar{K}_{ij} u_{,j})_{,i}, V_n). \\
(1) & \qquad (2) \qquad (3) \qquad (4)
\end{aligned} \tag{8}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^{M_v} y_k V_k + \sum_{s=1}^{M_w} w_s V_s^w \\
u_{,t} &= \sum_{k=1}^{M_v} (y_{,t})_k V_k + \sum_{s=1}^{M_w} (w_{,t})_s V_s^w \\
u_{,i} &= \sum_{k=1}^{M_v} y_k (V_{,i})_k + \sum_{s=1}^{M_w} w_s (V_{,i}^w)_s \\
\bar{A}_i &= \sum_{k=1}^{M_v} y_k (\bar{A}_i)_k + \sum_{s=1}^{M_w} w_s (\bar{A}^w_i)_s \\
\bar{G}_i &= \sum_{k=1}^{M_v} y_k (\bar{G}_i)_k + \sum_{s=1}^{M_w} w_s (\bar{G}^w_i)_s \\
\bar{K}_{ij} &= \sum_{k=1}^{M_v} y_k (\bar{K}_{ij})_k + \sum_{s=1}^{M_w} w_s (\bar{K}^w_{ij})_s,
\end{aligned}$$

où l'indice  $k$  représente les modes classiques et  $s$  les modes ajoutés.

D'où on peut développer les divers termes de l'équation (8) :

le terme (8.1)

$$(u_{,t}, V_n) = (y_n)_{,t} + \sum_{s=1}^{M_w} (w_{,t})_s (V_s^w, V_n),$$

le terme (8.2)

$$\begin{aligned} (\overline{A}_i u_{,i}, V_n) &= \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l \left( (\overline{A}_i)_k (V_{,i})_l, V_n \right) \\ &+ \sum_{s=1}^{M_w} \sum_{k=1}^{M_v} w_s y_k \left( (\overline{A}_i)_k (V_{,i}^w)_s + (\overline{A^w}_i)_s (V_{,i})_k, V_n \right) \\ &+ \sum_{s,q=1}^{M_w} w_s w_q \left( (\overline{A^w}_i)_s (V_{,i}^w)_q, V_n \right), \end{aligned}$$

le terme (8.3)

$$\begin{aligned} (\overline{G}_i u_{,i}, V_n) &= \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l \left( (\overline{G}_i)_k (V_{,i})_l, V_n \right) \\ &+ \sum_{s=1}^{M_w} \sum_{k=1}^{M_v} w_s y_k \left( (\overline{G}_i)_k (V_{,i}^w)_s + (\overline{G^w}_i)_s (V_{,i})_k, V_n \right) \\ &+ \sum_{s,q=1}^{M_w} w_s w_q \left( (\overline{G^w}_i)_s (V_{,i}^w)_q, V_n \right), \end{aligned}$$

le terme (8.4)

$$\left( (\overline{K}_{ij} u_{,j})_{,i}, V_n \right) = - \left( \overline{K}_{ij} u_{,j}, (V_n)_{,i} \right) + \left[ \overline{K}_{ij} u_{,j}, V_n \right],$$

qui se décompose en

$$\begin{aligned}
(\overline{K}_{ij} u_{,j}, (V_{,i})_n) &= \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l ((\overline{K}_{ij})_k (V_{,j})_l, (V_{,i})_n) \\
&+ \sum_{s=1}^{M_w} \sum_{k=1}^{M_v} w_s y_k ((\overline{K}_{ij})_k (V_{,j}^w)_s + (\overline{K^w}_{ij})_s (V_{,j})_k, (V_{,i})_n) \\
&+ \sum_{s,q=1}^{M_w} w_s w_q ((\overline{K^w}_{ij})_s (V_{,j}^w)_q, (V_{,i})_n),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[\overline{K}_{ij} u_{,j}, V_n] &= \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l [(\overline{K}_{ij})_k (V_{,j})_l, V_n] \\
&+ \sum_{s=1}^{M_w} \sum_{k=1}^{M_v} w_s y_k [(\overline{K}_{ij})_k (V_{,j}^w)_s + (\overline{K^w}_{ij})_s (V_{,j})_k, V_n] \\
&+ \sum_{s,q=1}^{M_w} w_s w_q [(\overline{K^w}_{ij})_s (V_{,j}^w)_q, V_n].
\end{aligned}$$

L'équation (8) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
(y_n)_{,t} + \sum_{s=1}^{M_w} (w_{,t})_s (V_s^w, V_n) &= \sum_{k,l=1}^{M_v} y_k y_l \mathbf{a}_{nkl} \\
&+ \sum_{s=1}^{M_w} \sum_{k=1}^{M_v} w_s y_k \mathbf{b}_{nsk} \\
&+ \sum_{s,q=1}^{M_w} w_s w_q \mathbf{c}_{nsq},
\end{aligned} \tag{9}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{nkl} &= - \left( (\overline{A}_i)_k (V_{,i})_l, V_n \right) - \left( (\overline{G}_i)_k (V_{,i})_l, V_n \right) \\
&\quad - \left( (\overline{K}_{ij})_k (V_{,j})_l, (V_{,i})_n \right) + \left[ (\overline{K}_{ij})_k (V_{,j})_l, V_n \right], \\
\mathbf{b}_{nsk} &= - \left( (\overline{A}_i)_k (V_{,i}^w)_s + (\overline{A}^w_i)_s (V_{,i})_k, V_n \right) \\
&\quad - \left( (\overline{G}_i)_k (V_{,i}^w)_s + (\overline{G}^w_i)_s (V_{,i})_k, V_n \right) \\
&\quad - \left( (\overline{K}_{ij})_k (V_{,j}^w)_s + (\overline{K}^w_{ij})_s (V_{,j})_k, (V_{,i})_n \right) \\
&\quad + \left[ (\overline{K}_{ij})_k (V_{,j}^w)_s + (\overline{K}^w_{ij})_s (V_{,j})_k, V_n \right], \\
\mathbf{c}_{nsq} &= - \left( (\overline{A}^w_i)_s (V_{,i}^w)_q, V_n \right) - \left( (\overline{G}^w_i)_s (V_{,i}^w)_q, V_n \right), \\
&\quad - \left( (\overline{K}^w_{ij})_s (V_{,j}^w)_q, (V_{,i})_n \right) + \left[ (\overline{K}^w_{ij})_s (V_{,j}^w)_q, V_n \right].
\end{aligned}$$

Introduire des modes de contrôle dans la méthode P.O.D. classique permet comme le montre l'équation (9) de prendre en compte des conditions de Dirichlet non homogène, sans pour autant en augmenter la complexité.



## 5 Simulation numérique d'un jet pulsé

L'utilisation des jets pariétaux est d'un grand intérêt pour le contrôle actif d'écoulements. Une nouvelle méthode de contrôle actif d'écoulements a été proposée par Smith et Glezer [5]. Cette méthode consiste à créer un jet synthétique par un dispositif dans lequel l'écoulement est modifié sans injection de masse en moyenne, mais simplement, grâce à une petite variation de volume dans une cavité reliée avec l'écoulement externe par un conduit normal à la paroi.

Un jet synthétique est créé en appliquant, de manière périodique, un piston ou un diaphragme "piezoélectrique" sur un côté de la cavité. La figure 9 illustre une section transversale d'un actionneur de forme ronde ou rectangulaire opérant dans l'air ambiant. L'air entre et sort de la cavité à travers un orifice opposé au piston ou au diaphragme. Lors de l'admission de mouvement, le fluide qui est autour de l'orifice, est aspiré à l'intérieur de la cavité. Quand le fluide est refoulé hors de la cavité, il se forme une couche de cisaillement entre les fluides sortant et environnant. Cette couche tourbillonnaire s'enroule pour former un anneau de tourbillons (ou deux tourbillons parallèles dans le cas d'un actionneur rectangulaire). Pendant la période où le diaphragme s'éloigne de l'orifice pour aspirer à nouveau le fluide à l'intérieur de la cavité, l'anneau de tourbillons s'est éloigné assez loin de manière à ne plus être affecté par le jet. Ainsi une chaîne d'anneaux de tourbillons (ou de paires de tourbillons dans le cas d'un actionneur rectangulaire) est formée par l'actionneur. En moyenne, les profils de la composante verticale de la vitesse sont similaires à ceux d'un jet stationnaire.

### Calcul de l'écoulement :

Dans un premier temps, on calcule l'écoulement produit par un jet pulsé en utilisant le code Aether [6] sans modèle de turbulence. Le jet pulsé est caractérisé par une largeur  $h$  de l'orifice de 0.5 mm, par un pic maximum de la composante verticale  $v$  à l'orifice de  $v_{ref} = 1m/s$  et par un nombre de Reynolds

$Re = 125$  basé sur  $h$ ,  $v_{ref}$  et la viscosité  $\nu$ ,  $Re = \frac{h v_{ref}}{\nu}$ . Le nombre de Strouhal  $St$  est de 0.02 d'où la fréquence  $fr = \frac{St v_{ref}}{h} = 0.04 Hz$ , la période est donc de  $T = \frac{1}{fr} = 25s$ .

La modélisation de la perturbation sur l'écoulement provient du mouvement harmonique de l'actionneur en utilisant des conditions aux bords d'aspiration et de soufflage. La perturbation sur le champ de l'écoulement est introduite au moyen de la composante verticale  $v$  de la vitesse à l'orifice :

$$V(x, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_{ref} \sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ à l'orifice,}$$

où  $w$  est la vitesse angulaire calculée à partir de la fréquence  $fr$  et on note  $u$  la composante horizontale de la vitesse. A chaque itération en temps, la vitesse est constante sur toute la largeur de l'orifice.

Le calcul de l'écoulement a été réalisé sur un maillage non structuré constitué de 12613 points, 25074 éléments triangulaires (voir la figure 10). Le domaine de calcul est compris entre  $-10 < x/h < 10$  et  $0 < y/h < 35$  avec une largeur de l'orifice de  $x/h = 1$ . La plus petite distance normale à la paroi est de  $2.710^{-2} \times h$ . Le pas de temps de chaque itération est constant et est égal à  $\Delta t = \frac{T}{500} = 0.05s$ .

On a, dans un premier temps, effectué 6000 itérations (soit 12 périodes) pour laisser s'établir l'écoulement instationnaire. A partir de là, on a calculé 1000 itérations en sauvegardant un cliché toutes les 10 itérations pour obtenir l'échantillon nécessaire au calcul de la P.O.D.

La figure (11) présente les isolignes de la vitesse verticale de l'écoulement à divers instants sur une période. On peut observer que les isovaleurs de  $v$  à la phase  $T$  sont assez proches de celles à la phase 0. On constate aussi que les paires de tourbillons sont convectées vers l'aval.

Les figures suivantes (12) et (13) permettent de comparer le jet continu et la moyenne sur deux périodes du jet pulsé. Sur les figures (14) à (15), on trace les composantes verticales et horizontales de la vitesse en différentes sections  $y/h$  en fonction des affinités en  $x/b$ . La valeur de  $b$  est définie comme étant la demi-largeur du profil du jet à la moitié de la vitesse maximale. On note une bonne similarité des profils, ce résultat est en accord avec les travaux de Kral [7].

## 6 Approche P.O.D. pour les jets pulsés

La modélisation de la perturbation sur l'écoulement provient du mouvement harmonique de l'actionneur en utilisant des conditions aux bords d'aspiration et de soufflage. Appliquer la P.O.D. à un écoulement de Navier-Stokes compressible turbulent ou non issu d'un jet pariétal, va donc permettre de mettre en place un système dynamique simple prenant en compte des conditions aux bords de Dirichlet variables au cours du temps, et donc d'introduire un contrôle actif de l'écoulement.

On va maintenant construire le système dynamique représentatif de l'écoulement basé sur l'approche P.O.D. Pour cela on extrait 10 modes des 99 clichés sauvegardés, puis on résout sans stabilisation l'E.D.O. sur une période. La figure 16 montre les valeurs propres de la matrice de corrélation temporelle en échelle logarithmique. On peut aussi voir que les 10 premiers modes vont représenter 99% de l'énergie. La figure 17 présente les six premiers modes de la P.O.D., les suivantes, 18-19 la résolution du premier coefficient de l'E.D.O. et l'erreur de reconstruction de l'écoulement. On peut observer que les coefficients simulés par l'E.D.O. ne suivent pas du tout ceux calculés en projetant les clichés sur les modes (courbe de référence), de plus l'erreur de reconstruction est vraiment mauvaise. En fait, le processus de P.O.D. que l'on a appliqué jusqu'à présent ne prend pas du tout en compte des conditions aux bords variables en temps comme celles du jet pulsé. Il faut donc définir un nouveau processus.

Les conditions de Dirichlet dans le cas du jet pulsé étant très simples, on peut se contenter de prendre un seul mode de contrôle discontinu simple :

$$V^w = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega, \\ 1 & \text{sur l'orifice,} \end{cases}$$

avec

$$w_s(t) = v_{ref} \sin(wt).$$

La figure 20 montre les six premiers modes de la base P.O.D. prenant en compte les conditions aux bords obtenues à partir de l'écoulement à Reynolds 125 avec une vitesse verticale  $v_{ref}$  de 1 et une fréquence de 0.04 Hz. On peut observer que ces modes sont pratiquement identiques aux modes classiques (figure 17) (la seule différence étant les conditions aux bords nulles). La résolution de l'équation différentielle (9) est effectuée sans stabilisation et en utilisant un schéma en temps, de type prédicteur correcteur. La figure 21 présente la simulation des coefficients des troisième et cinquième modes ainsi que l'erreur de reconstruction. Cette figure permet de voir que la nouvelle méthode prend mieux en compte les conditions aux bords.

Pour tester l'efficacité de la méthode les mêmes calculs ont été effectués sur les écoulements obtenus avec soit une vitesse maximale double à l'orifice et/ou une fréquence doublée.

La figure 22 permet de voir les isolignes de la vitesse verticale (tous les  $1/5$  de période) de l'écoulement généré par un jet de fréquence 0.04 Hz et vitesse à l'orifice de 2, la figure 23, celle à fréquence 0.08 Hz et vitesse 1, et enfin la figure 24, celle à fréquence 0.08 Hz et vitesse 2. Les trois figures suivantes 25-27 présentent les six premiers modes de ces écoulements. Les résultats des résolutions de l'équation (9) (voir figures 28-30) montrent que la méthode fonctionne bien pour divers écoulements. En effet, les coefficients des modes trois et cinq suivent bien les courbes de référence, de plus les erreurs de reconstruction sont faibles.

## 7 Robustesse de la P.O.D. pour les jets pulsés

On veut maintenant tester la robustesse des systèmes créés. Pour cela, on résout l'E.D.O. d'un jet pulsé donné en prenant une base P.O.D. d'un autre jet pulsé. Les figures 31-34 font apparaître de façon claire que même si la reconstruction de l'écoulement avec une base P.O.D. proche n'est pas tout à fait adaptée, elle n'est pas complètement faussée. L'erreur de reconstruction sur les "mauvaises" bases est plus grande que sur la base issue du jet, mais elle reste de l'ordre de quelques pourcents au maximum. On constate aussi que l'erreur de reconstruction est essentiellement due à l'erreur initiale, mais qu'elle n'augmente pas constamment au cours du temps. La méthode est donc assez robuste.

Les bases P.O.D. issues des jets pulsés à  $v_{ref} = 1$   $fr = 0.04Hz$  et  $v_{ref} = 2$   $fr = 0.08Hz$  étant les plus adaptées aux divers écoulements, on a créé une nouvelle base en concaténant les clichés de ces deux jets. La figure 35 permet de comparer les valeurs propres de la matrice de corrélation temporelle issue des clichés de l'écoulement  $v_{ref} = 1$   $fr = 0.04Hz$  et celle de l'écoulement  $v_{ref} = 1$   $fr = 0.04Hz$  et  $v_{ref} = 2$   $fr = 0.08Hz$ . On peut en déduire qu'il faut plus de modes dans la base composée pour arriver à la même erreur de reconstruction. La figure 36 présente sur le jet à  $v_{ref} = 1$   $fr = 0.08Hz$  les coefficients du troisième et cinquième mode de la nouvelle base ainsi que l'erreur de reconstruction. Les coefficients ne sont pas parfaitement bien reconstruits mais l'erreur de reconstruction reste faible. On peut constater (voir les figures 37-40), que l'erreur de reconstruction des deux écoulements ( $v_{ref} = 1$   $fr = 0.04Hz$ ,  $v_{ref} = 2$   $fr = 0.08Hz$ ) sur cette base est du même ordre que celle sur la base adaptée et l'erreur sur les autres écoulements ( $v_{ref} = 2$   $fr = 0.04Hz$ ,  $v_{ref} = 1$   $fr = 0.08Hz$ ) est un peu plus faible que l'erreur sur une autre base.

## 8 Exemple de contrôle

Maintenant que la faisabilité et la robustesse de la P.O.D. avec conditions aux bords de Dirichlet non-homogène a été démontré, on veut vérifier les possibilités de contrôle du système dynamique. Pour cela on prend un petit exemple de contrôle en boucle ouverte pas très réaliste. Toujours dans le cas du jet pulsé on veut minimiser la différence de pression entre deux points (situés dans l'alignement du centre du jet) en contrôlant la fréquence de pulsation dans un certain domaine.

Plus précisément on veut :

$$\min_{fr \in [0.04, 0.2]} J(fr) = \min_{fr \in [0.04, 0.2]} \int_{t_i}^{t_i + \frac{10}{fr}} (p(x_2, t) - p(x_1, t))^2 dt$$

où  $x_1 = (0, 1.95h)$  et  $x_2 = (0, 2.05h)$  sont les points où l'on observe la pression  $p$ .

Le système dynamique représentatif P.O.D. est crée à partir des clichés issus des écoulements à fréquences  $fr = 0.04Hz$  et  $fr = 0.1Hz$  avec une vitesse de référence de  $v_{ref} = 1$ .

La figure 41 présente la fonction coût  $J$  en fonction de la fréquence. Cette fonction est calculée avec la P.O.D., on peut observer que le minimum est atteint pour la fréquence la plus élevée  $fr = 0.2Hz$ . Cette courbe est très facile et rapide à obtenir, étant calculé à partir du système dynamique P.O.D. (un point de la courbe est obtenu en 10 minutes pour l'E.D.O. au lieu de 5 heures).

Les figures 42 et 43 montrent la différence de pression entre les points  $x_1$  et  $x_2$  pour la fréquence  $fr = 0.04Hz$  et la fréquence optimale  $0.2Hz$ . Ces figures sont obtenues dans le premier cas avec l'E.D.O. dans le second avec l'E.D.P. issue des équations de Navier-Stokes. On peut remarquer, bien que les résultats ne soient pas superposables, que dans les deux cas les courbes sont relativement semblables, et que la fréquence  $0.2Hz$  divise au moins par deux la différence de pression. En fait, cette fréquence est bien la fréquence optimale dans les deux cas.

L'équation différentielle ordinaire issue de la P.O.D. permet donc un contrôle en boucle ouverte très rapide, avec des résultats convenables.



## 9 Conclusion

Cette étude a permis tout d'abord d'étendre l'utilisation des approches P.O.D. au calcul d'écoulements stationnaires compressibles turbulents. On a démontré la faisabilité de cette approche en l'appliquant à un écoulement autour d'une aile NACA0012 à haute incidence avec un nombre de Reynolds élevé ( $Re = 100000$ ). Différentes stratégies d'implantation ont été testées : la P.O.D. avec un seul mode de viscosité turbulente (le mode de turbulence moyenne) semble être la plus efficace tant au niveau du temps de calcul, que de la qualité des résultats.

La seconde partie de cette étude propose une solution pour la prise en compte en P.O.D. des calcul d'écoulements avec conditions aux bords de Dirichlet non-homogène. La faisabilité et la robustesse de cette extension de la P.O.D. ont été testées sur des écoulements issus de jets pulsés. Ceci a permis d'introduire un premier exemple de contrôle d'écoulements avec la P.O.D.

Les systèmes d'E.D.O. issus de l'approche P.O.D. ayant montré qu'ils peuvent constituer des systèmes dynamiques représentatifs d'écoulements aérodynamiques assez réalistes, les études futures seront basées sur cette approche. Ces études porteront essentiellement sur la conception d'algorithmes de contrôle avec jets pulsés. Mais on peut par ailleurs envisager des applications à l'aéroélasticité ou à la conception optimale de forme.

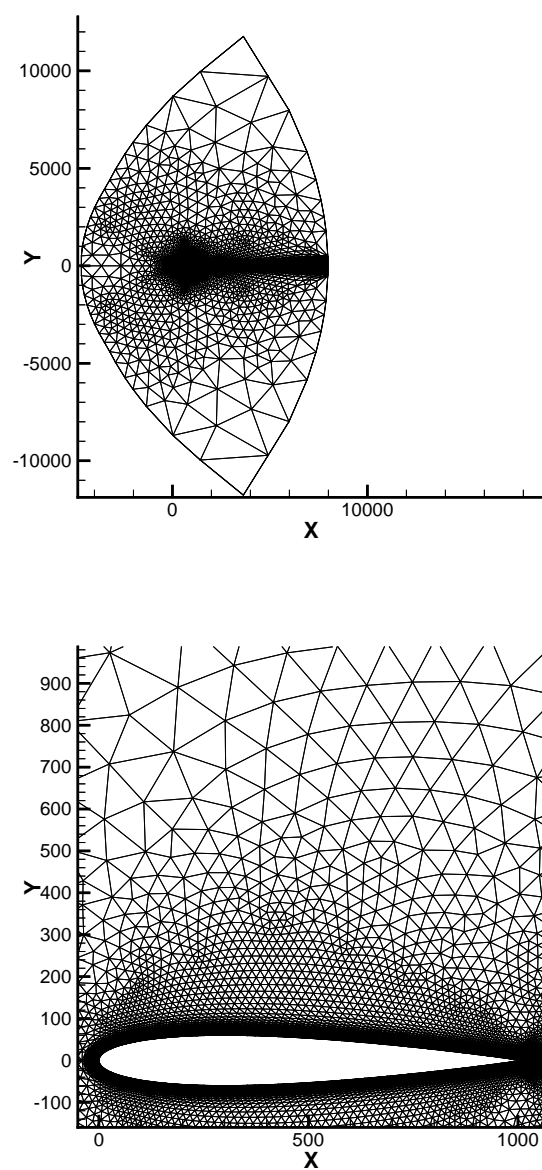


FIG. 1 – Maillage NACA12 complet et zoom, (chap. 3).

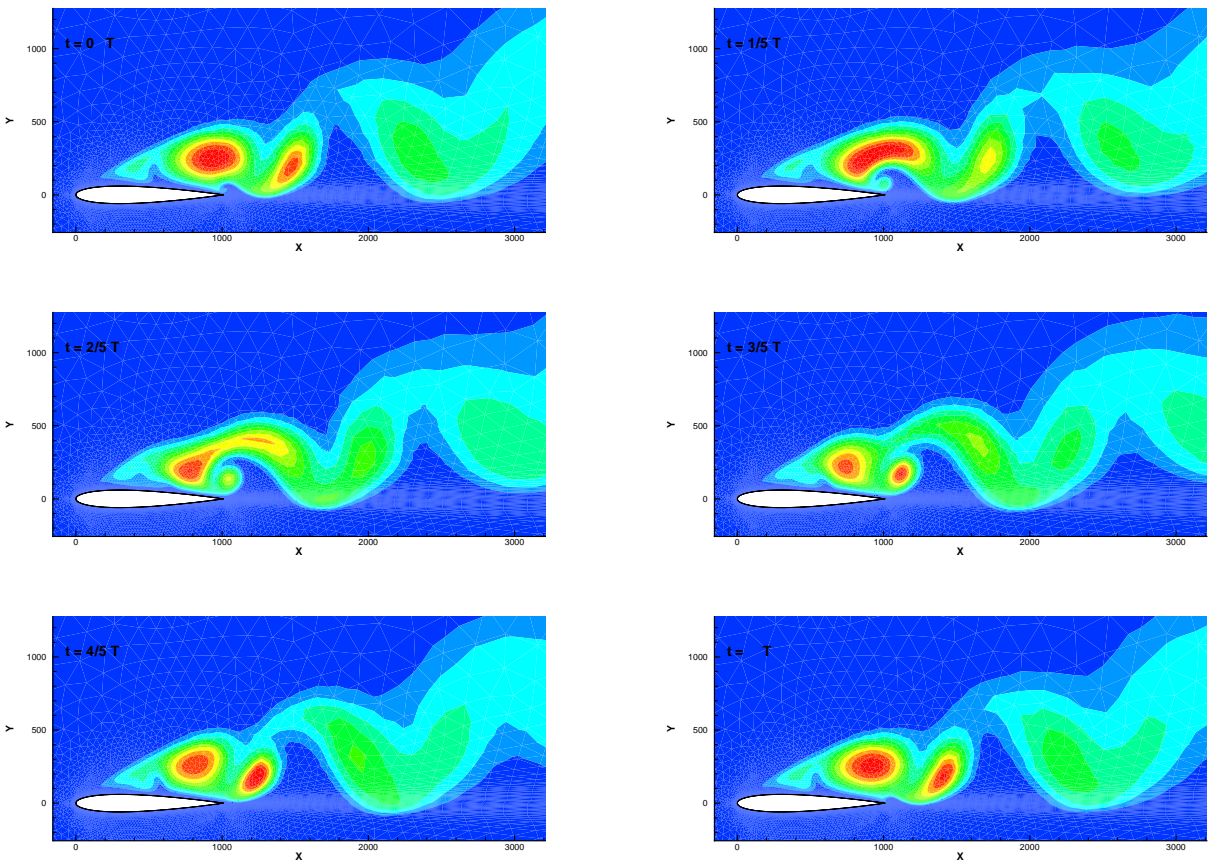


FIG. 2 – Ecoulement autour d'un profil d'aile NACA 0012 à Mach 0.2, Reynolds 100000 et  $20^\circ$  d'incidence sur une période. Isovaleur de viscosité turbulente, (chap. 3).

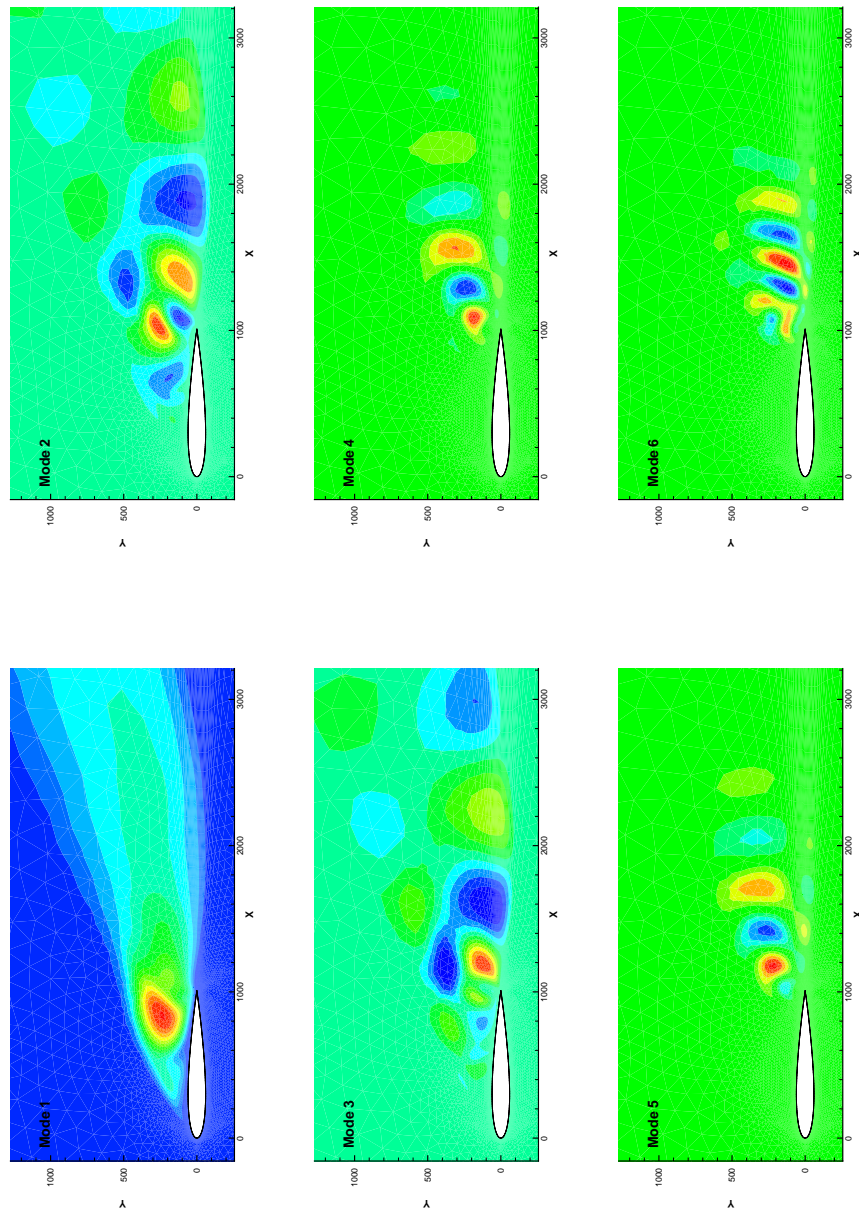


FIG. 3 – Viscosité turbulente des **modes** de l'écoulement autour d'un profil d'aile NACA0012 à Mach 0.2, Reynolds  $10^5$  et  $20^\circ$  d'incidence, (chap. 3).

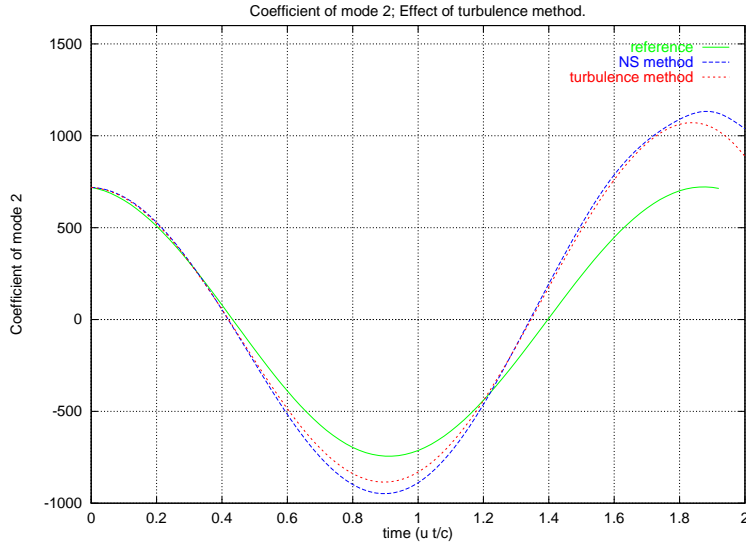


FIG. 4 – Evolution en temps du coefficient du deuxième mode, méthode classique et méthode avec 1 mode de turbulence, (chap. 3).

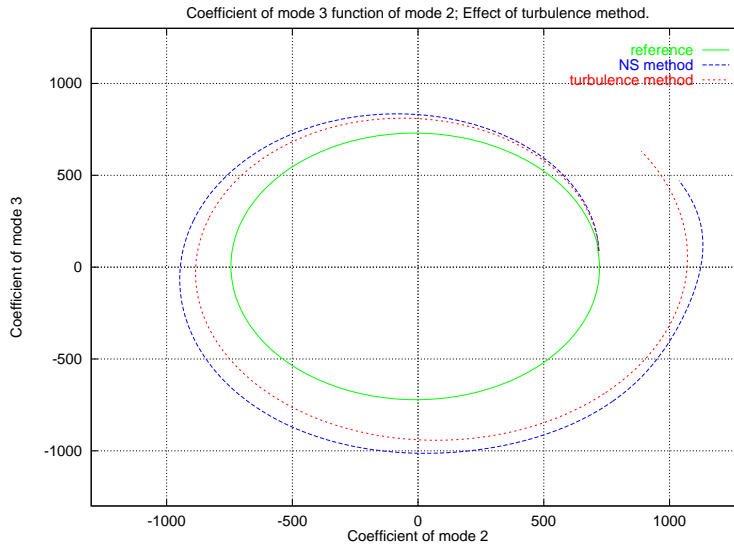


FIG. 5 – Evolution du coefficient du troisième mode en fonction du deuxième mode, méthode classique et méthode avec 1 mode de turbulence, (chap. 3).

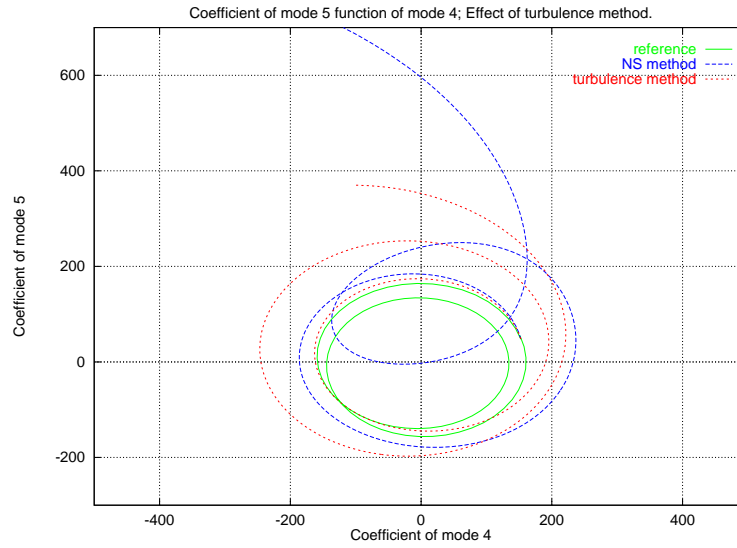


FIG. 6 – Evolution du coefficient du cinquième mode en fonction du quatrième mode, méthode classique et méthode avec 1 mode de turbulence, (chap. 3).

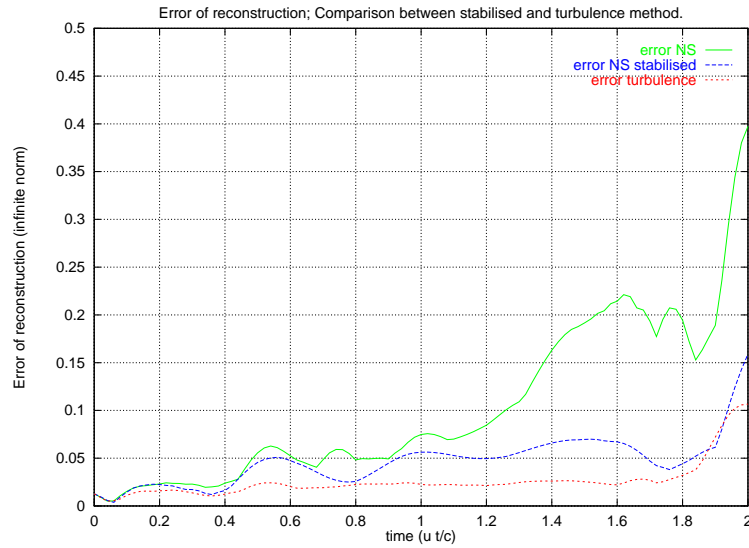


FIG. 7 – Evolution de l'erreur de reconstruction (en norme infini), méthode classique, méthode stabilisée et méthode avec 1 mode de turbulence, (chap. 3).

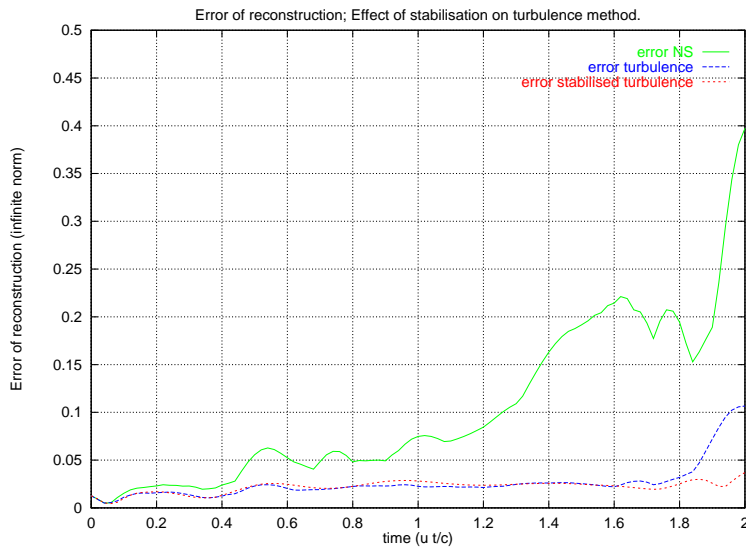


FIG. 8 – Evolution de l'erreur de reconstruction (en norme infini), méthode classique, méthode avec 1 mode de turbulence et méthode stabilisée avec 1 mode de turbulence, (chap. 3).

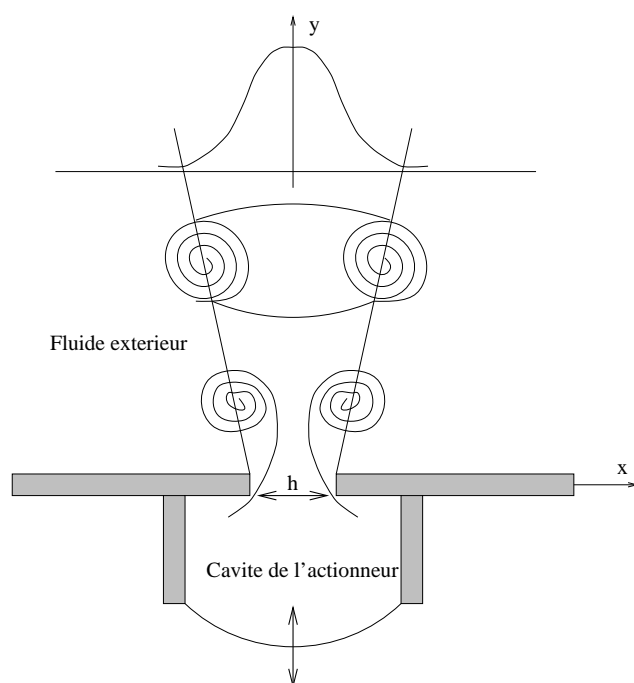


FIG. 9 – Schéma du jet pulsé, (chap. 5).



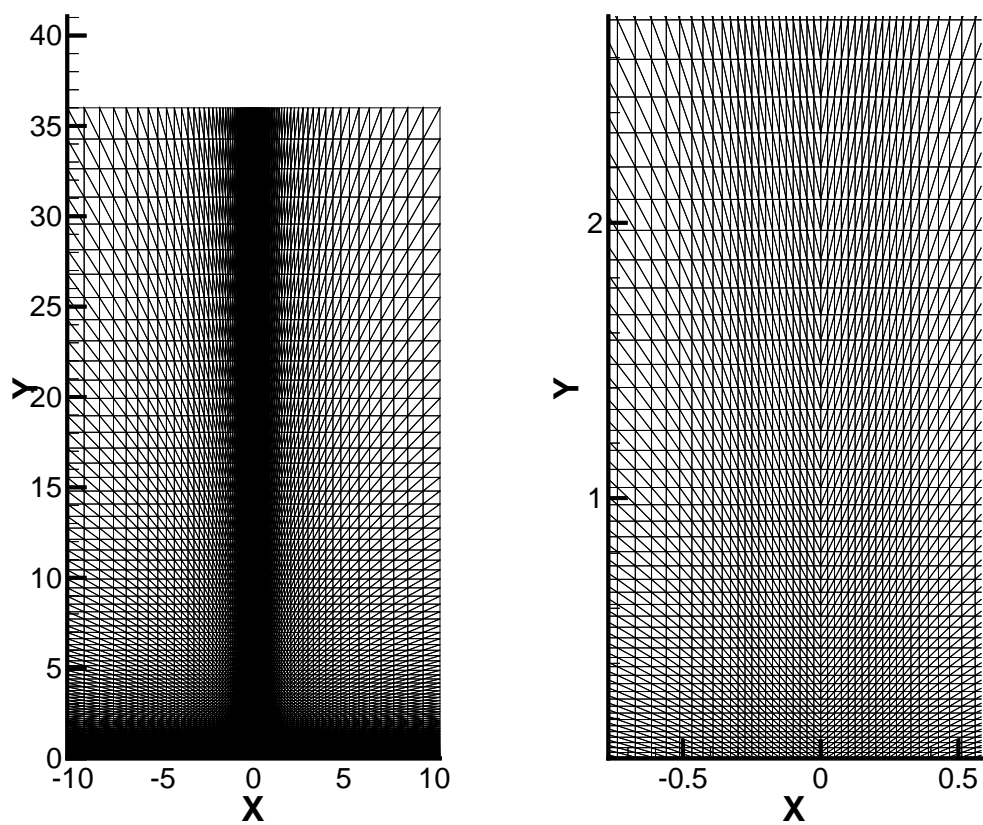


FIG. 10 – Maillage Jet, vue partielle à droite, (chap. 5).

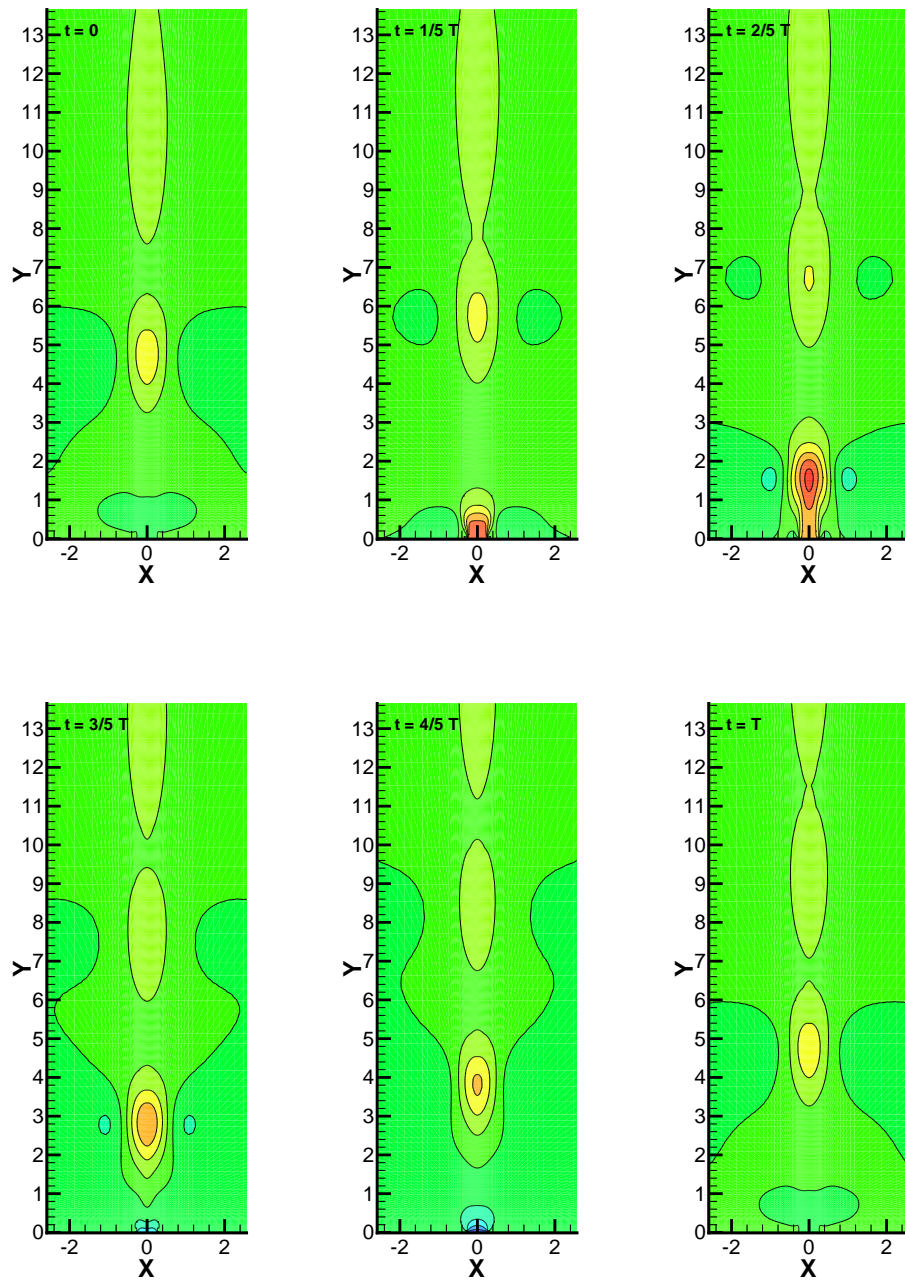


FIG. 11 – Vitesse verticale du jet pulsé sur une période  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$   
 $fr=0.04Hz$ , (chap. 5).  
 RR n° 3945

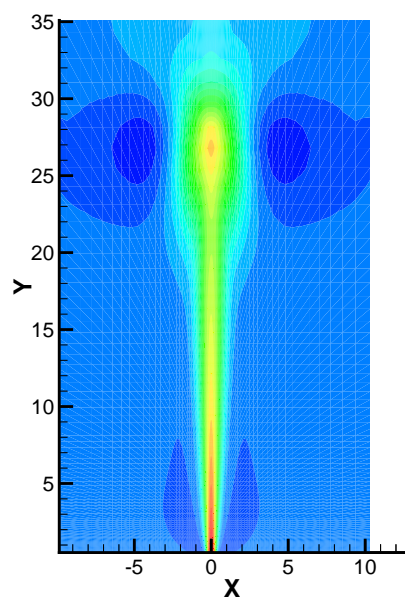


FIG. 12 – Vitesse verticale du jet continu  $v_{ref}=1$ ,  $Re=125$ , (chap. 5).

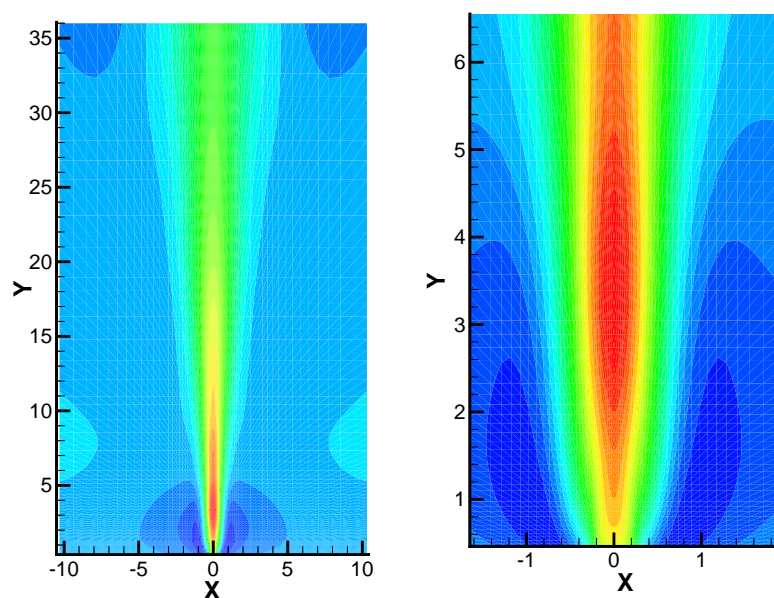


FIG. 13 – Vitesse verticale du jet pulsé moyen  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 5).

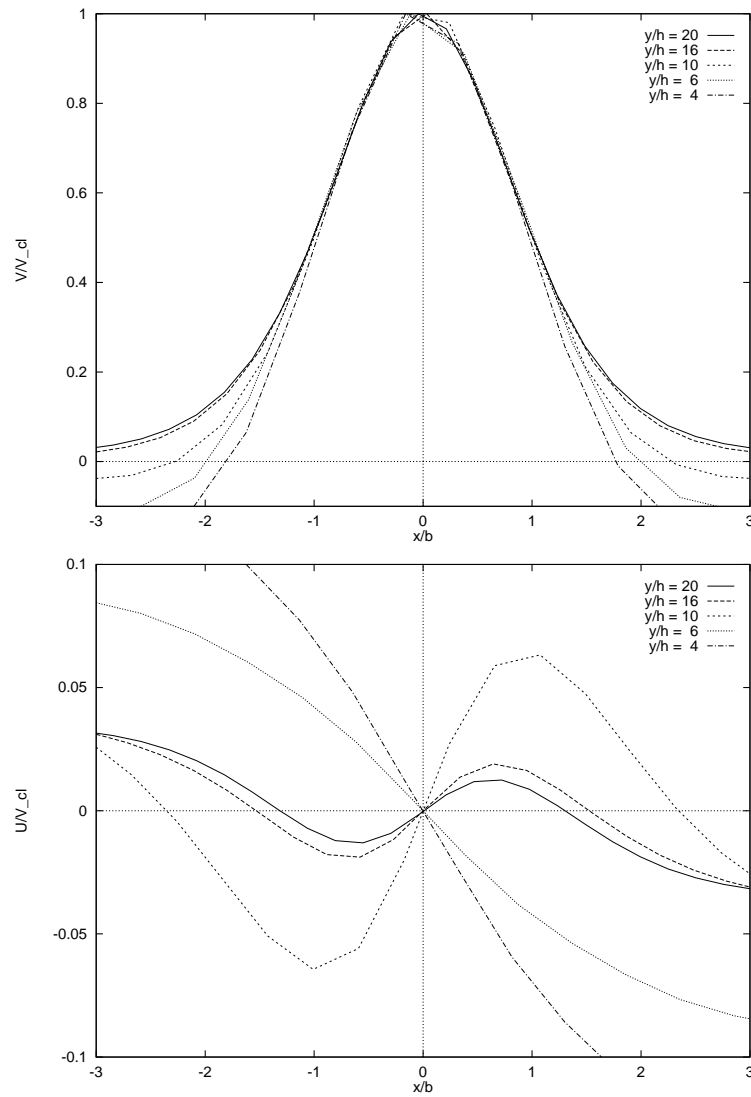


FIG. 14 – Section en  $y/h$  constant de la composante verticale  $v/v_{cl}$  et horizontale  $u/v_{cl}$  de la vitesse du jet continu;  $v_{cl}$  est la valeur maximale de la composante  $v$  sur la section, (chap. 5).

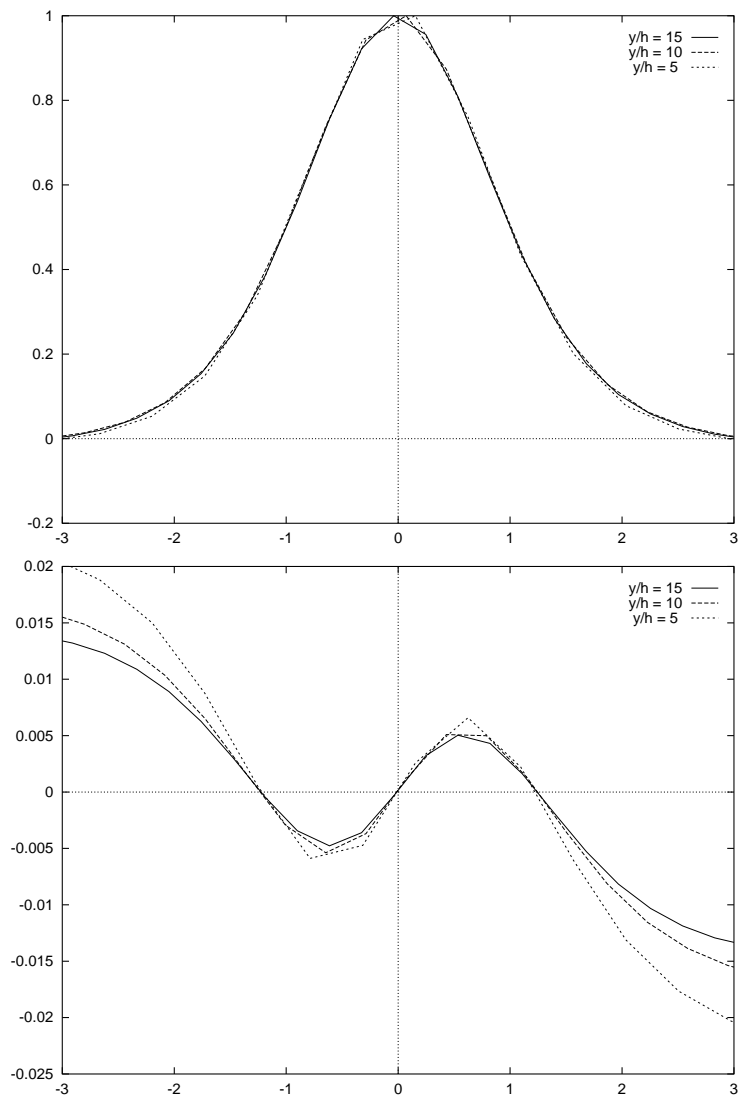


FIG. 15 – Section en  $y/h$  constant de la composante verticale  $v/v_{cl}$  et horizontale  $u/v_{cl}$  de la vitesse du jet pulsé moyen;  $v_{cl}$  est la valeur maximale de la composante  $v$  sur la section, (chap. 5).

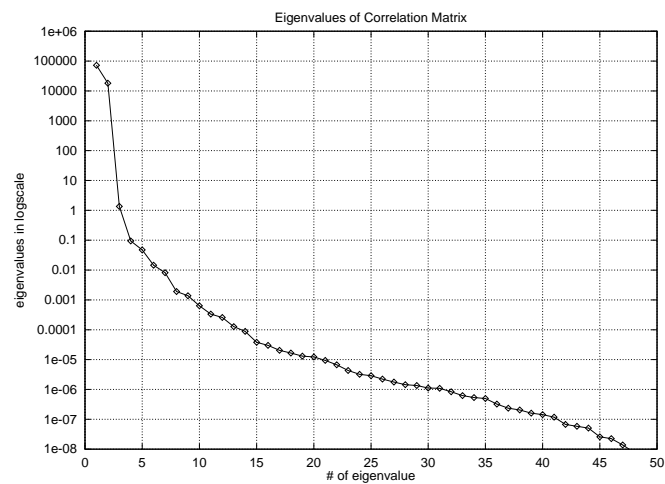


FIG. 16 – Valeurs propres de la matrice de corrélation du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).

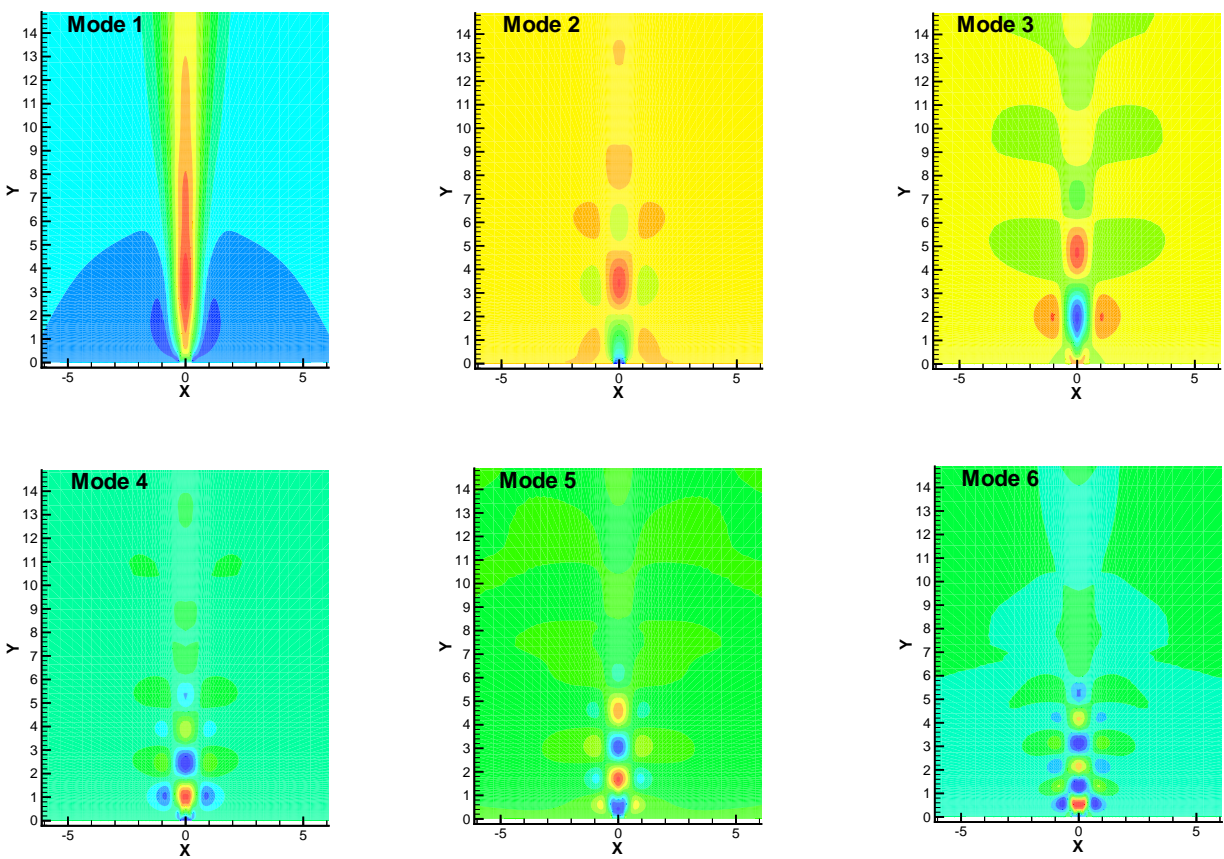


FIG. 17 – Vitesse verticale des modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).



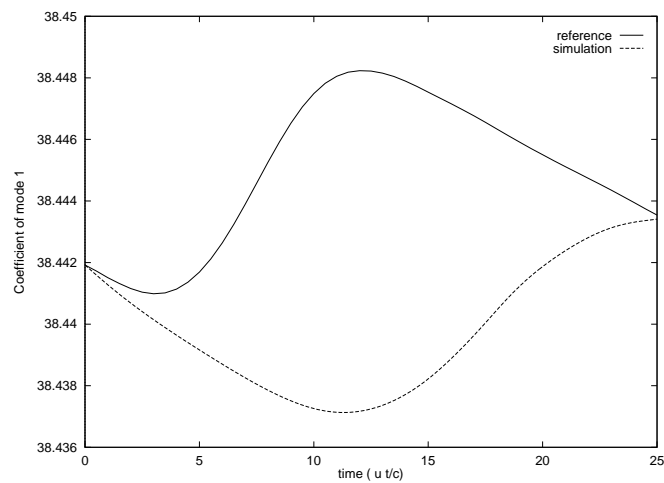


FIG. 18 – Simulation POD du 1<sup>er</sup> mode du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).

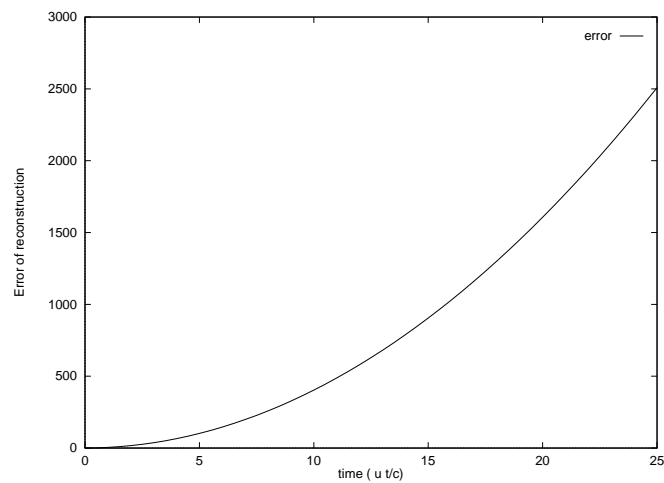


FIG. 19 – Erreur de reconstruction de la simulation POD du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).

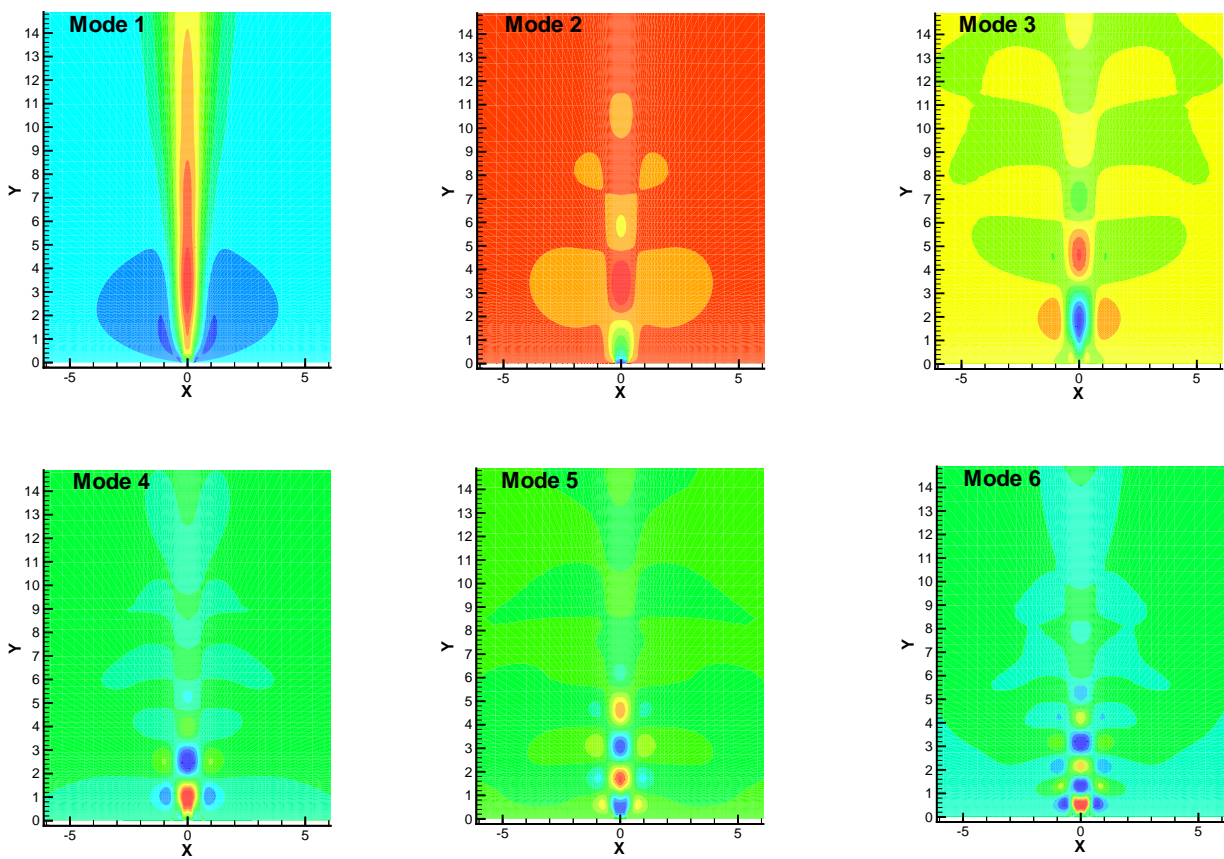


FIG. 20 – Vitesse verticale des modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).

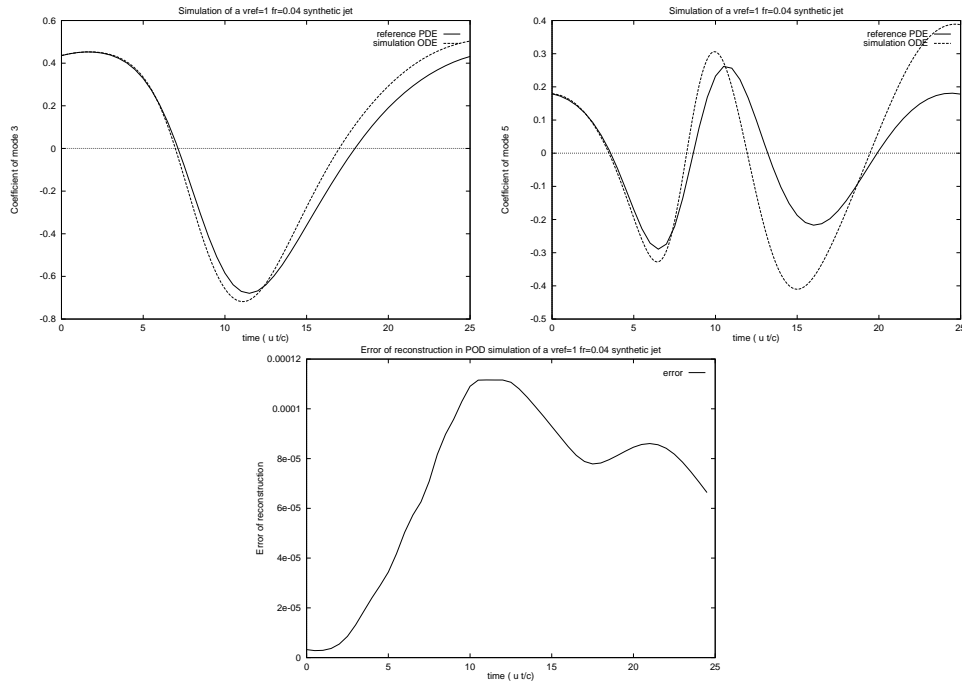


FIG. 21 – Comparaison E.D.P. et simulation P.O.D. avec 10 modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04$ Hz, (chap. 6).

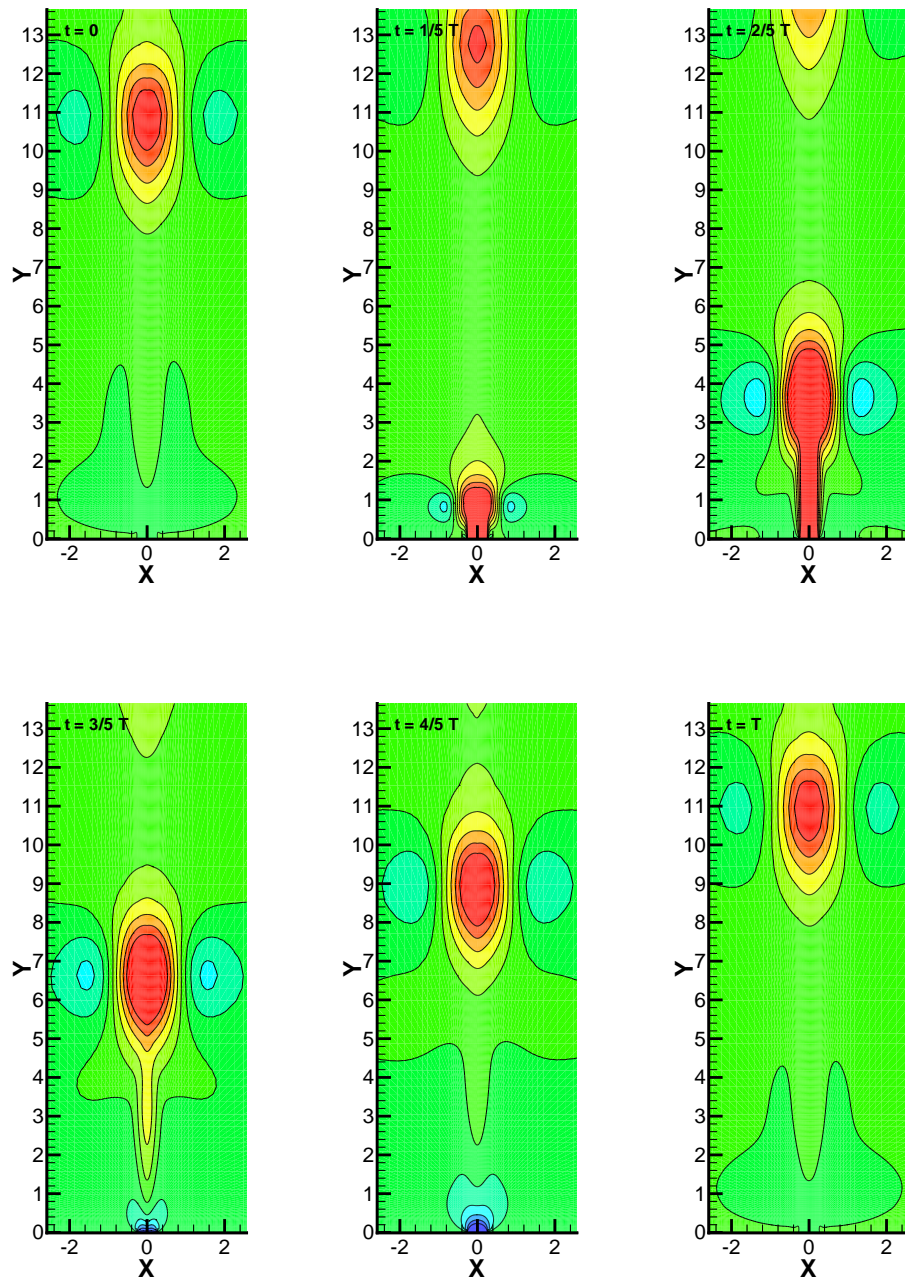


FIG. 22 – Vitesse verticale du jet pulsé sur une période  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$   
 $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).  
 RR n° 3945

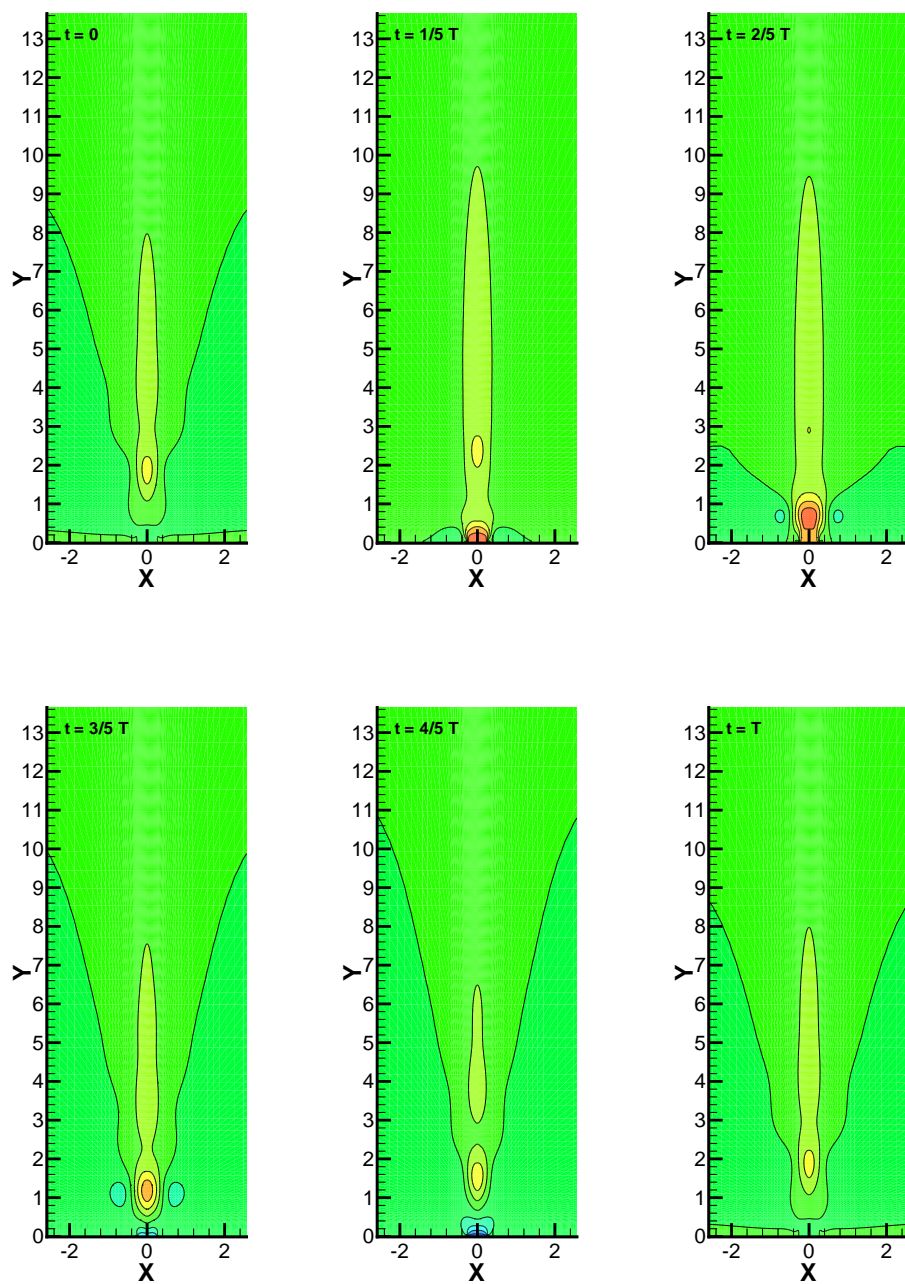


FIG. 23 – Vitesse verticale du jet pulsé sur une période  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$   $fr=0.08Hz$ , (chap. 6).

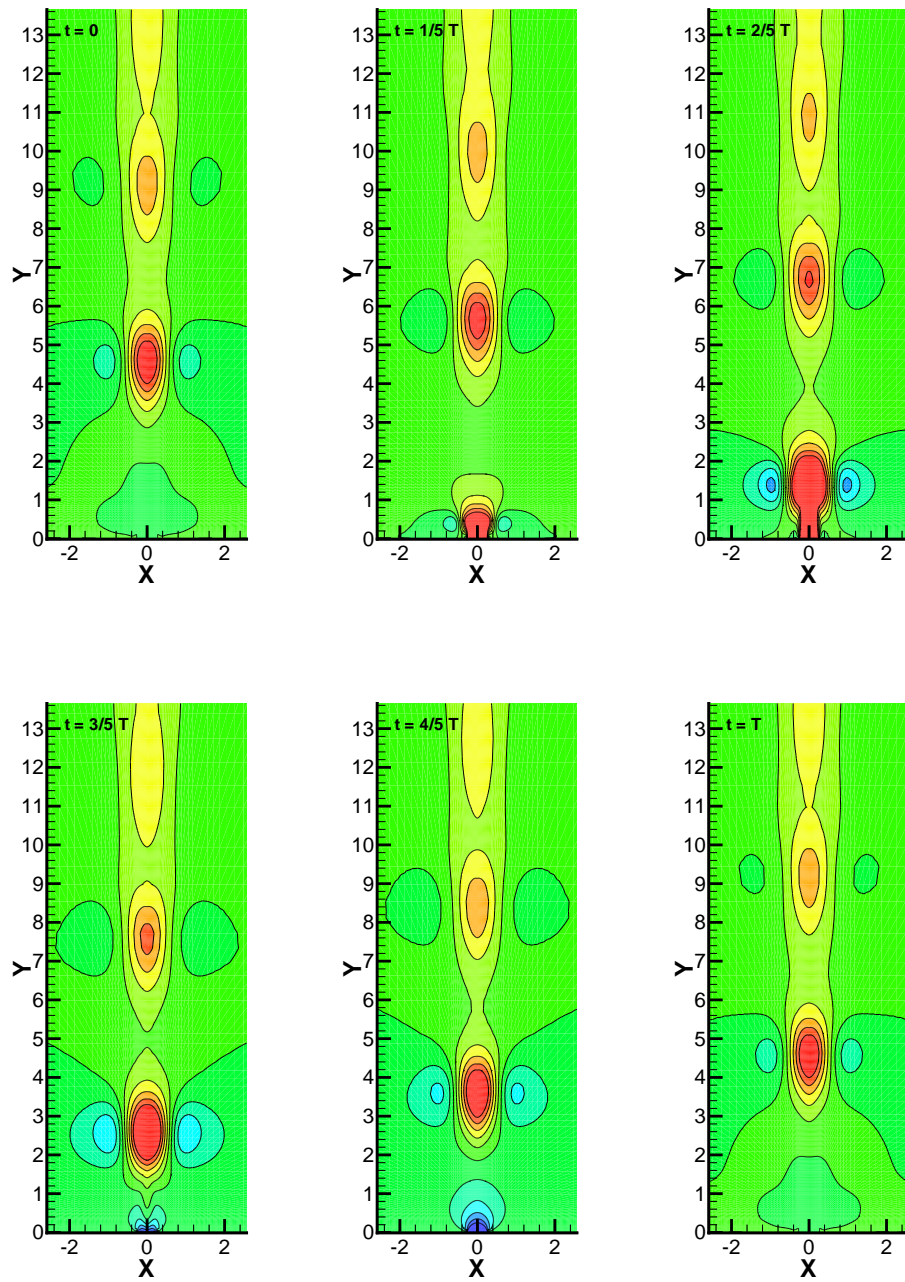


FIG. 24 – Vitesse verticale du jet pulsé sur une période  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$   
 $fr=0.08Hz$ , (chap. 6).  
 RR n° 3945

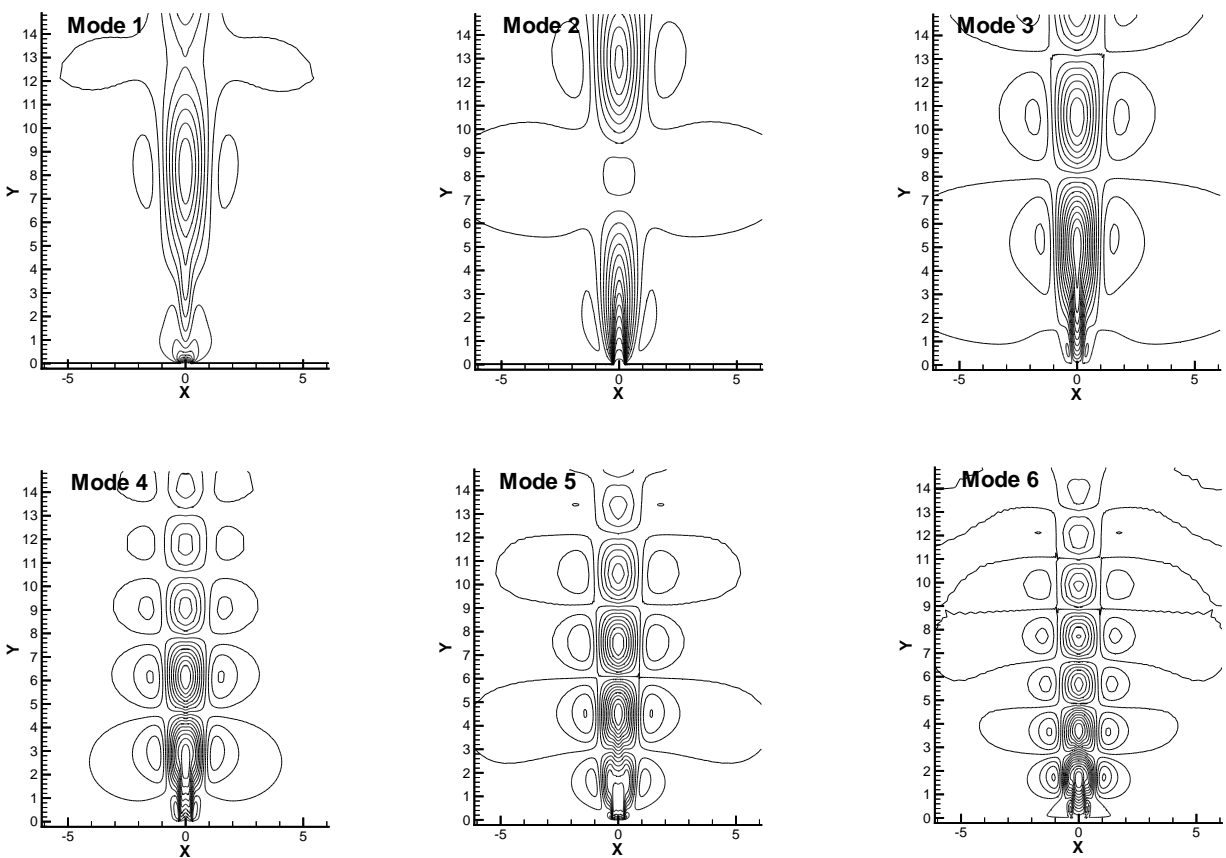


FIG. 25 – Vitesse verticale des modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).

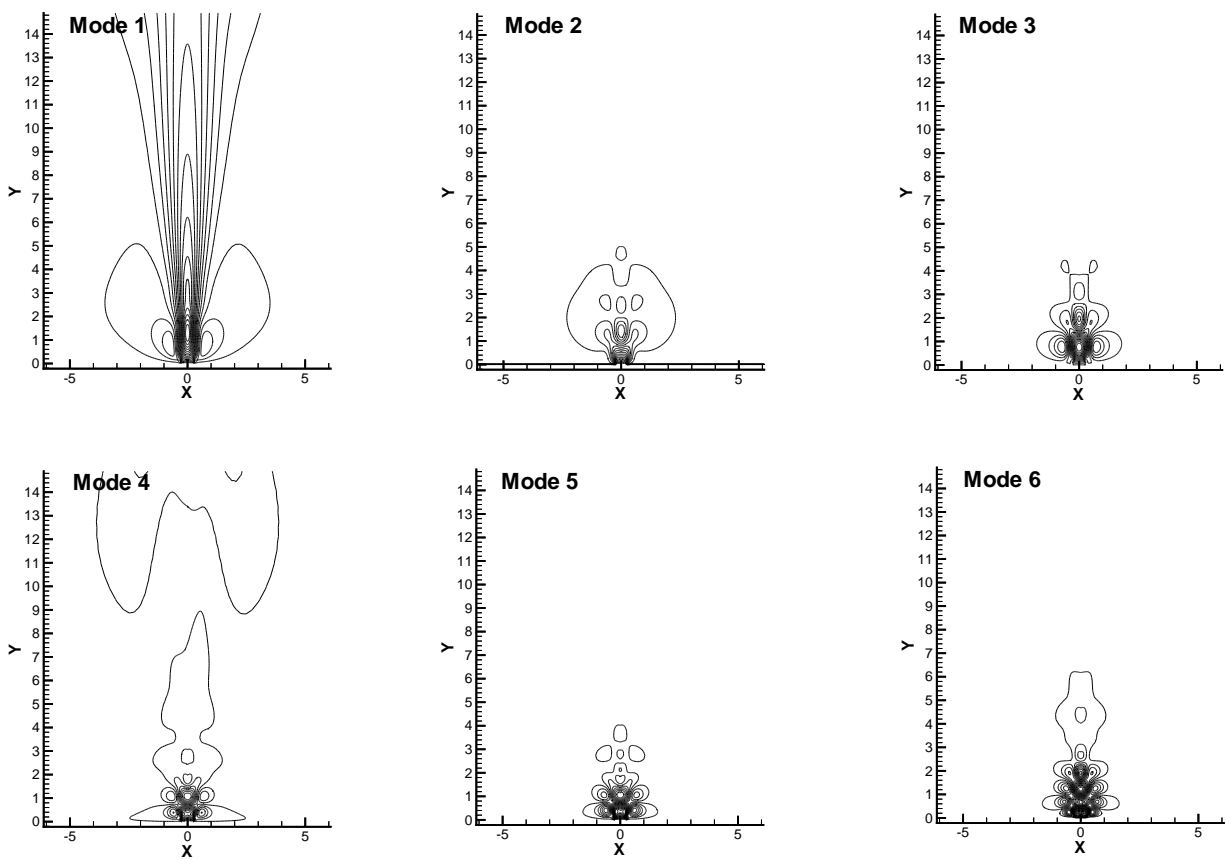


FIG. 26 – Vitesse verticale des modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.08Hz$ , (chap. 6).



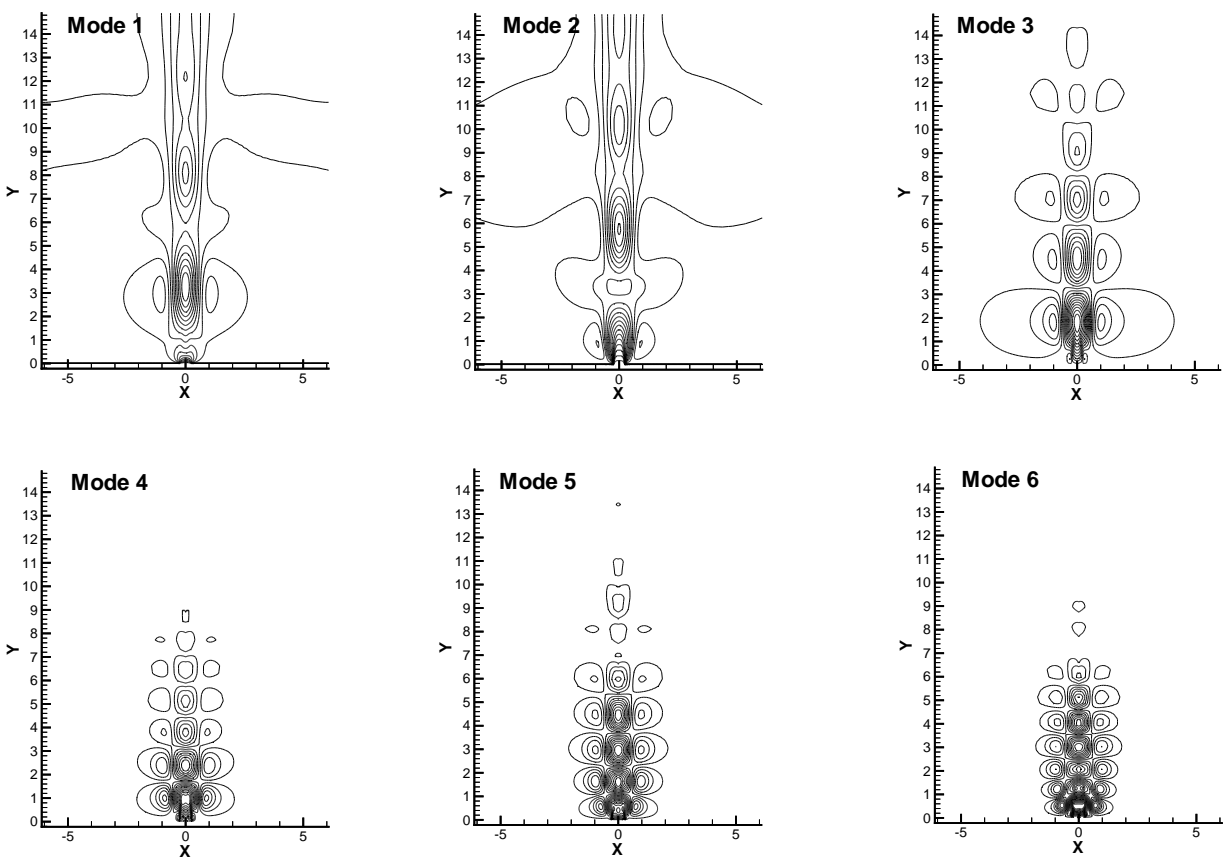


FIG. 27 – Vitesse verticale des modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.08Hz$ , (chap. 6).

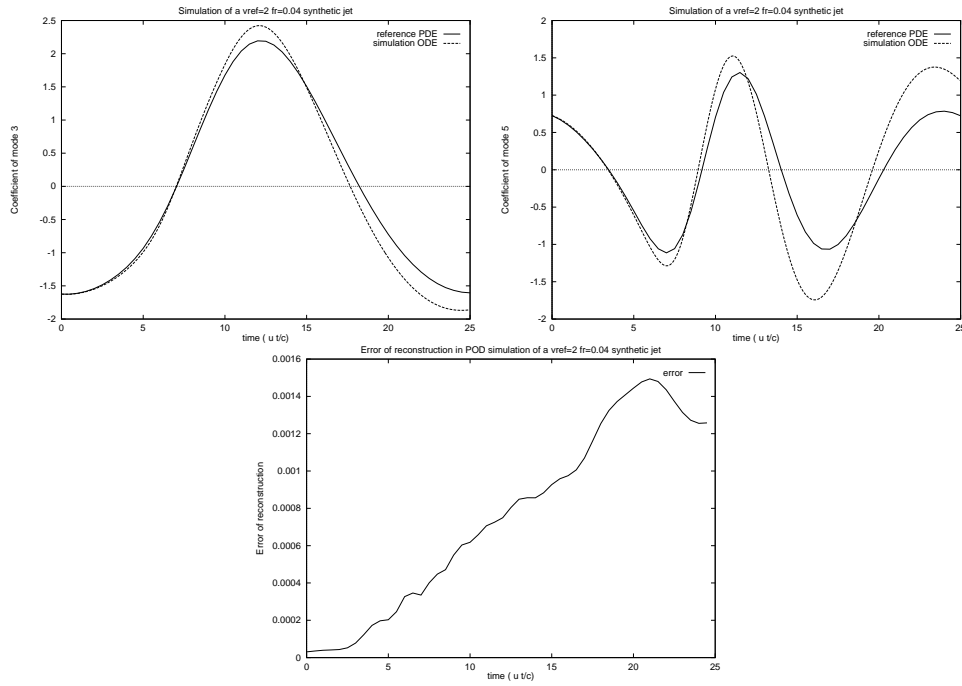


FIG. 28 – Comparaison E.D.P. et simulation P.O.D. avec 10 modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.04Hz$ , (chap. 6).

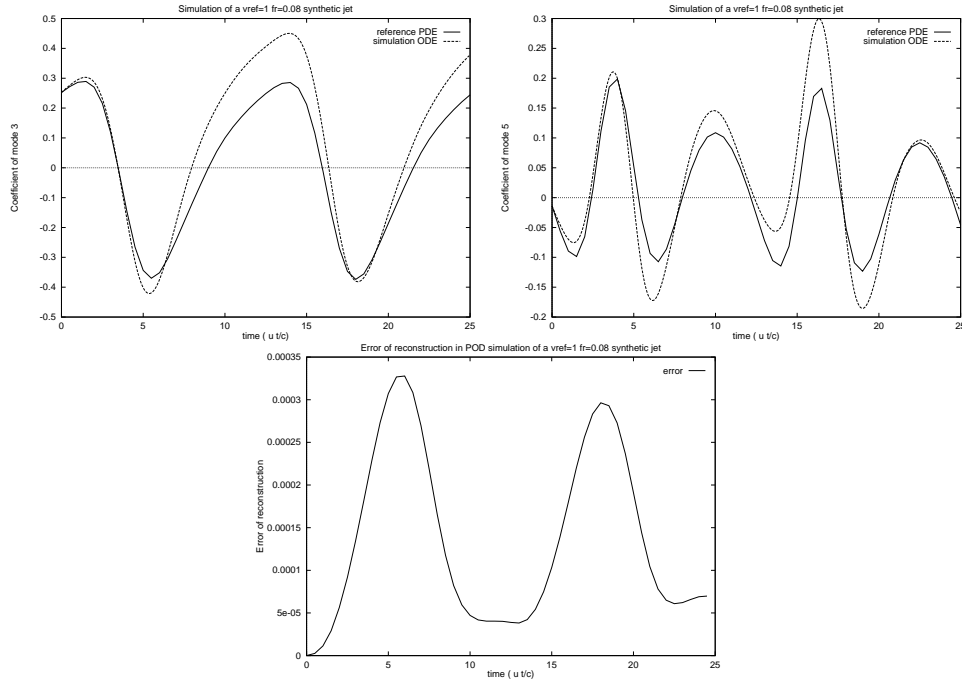


FIG. 29 – Comparaison E.D.P. et simulation P.O.D. avec 10 modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.08Hz$ , (chap. 6).

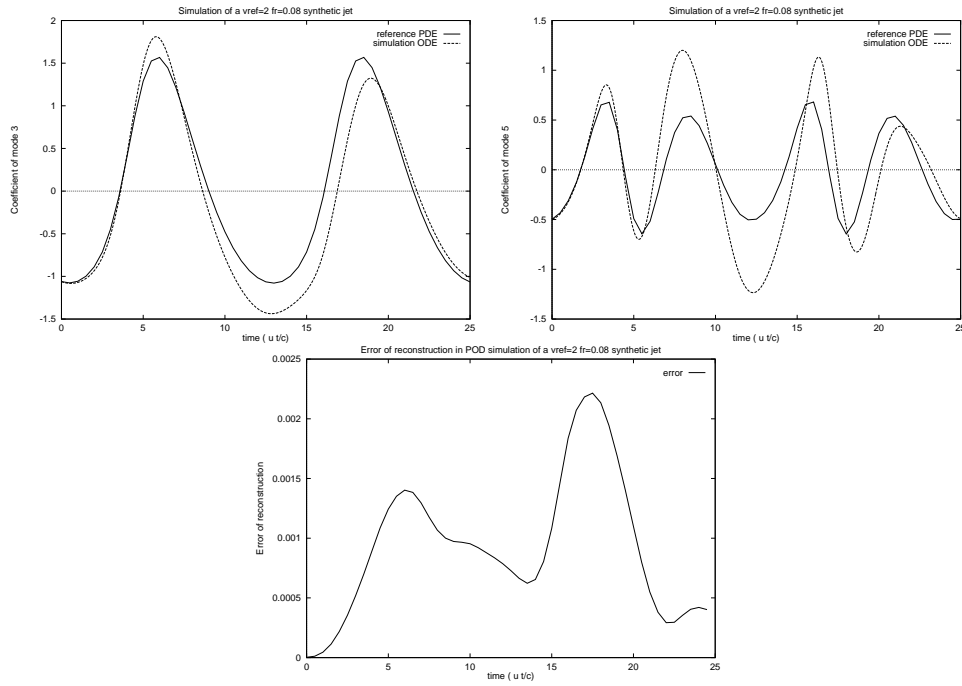


FIG. 30 – Comparaison E.D.P. et simulation P.O.D. avec 10 modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.08$ Hz, (chap. 6).

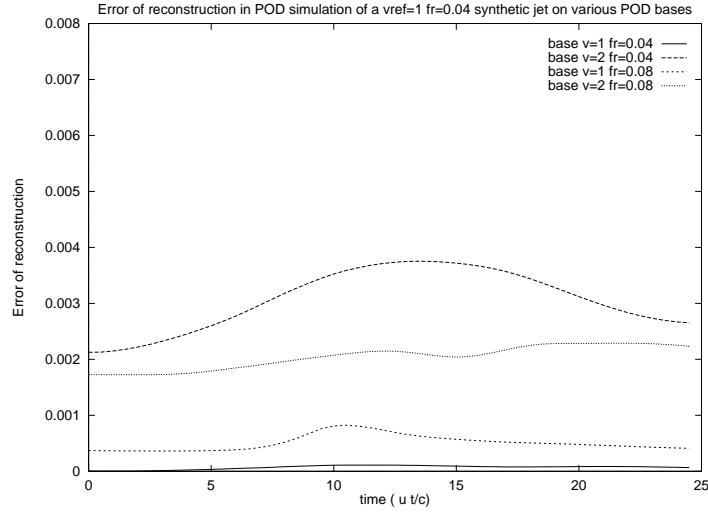


FIG. 31 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

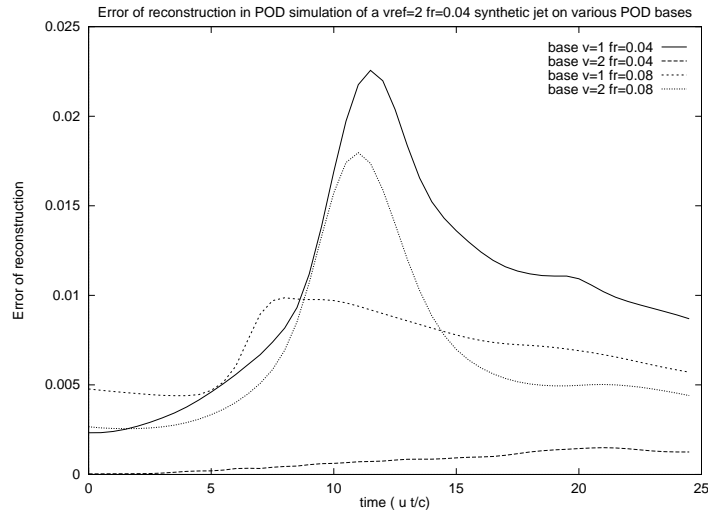


FIG. 32 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.04Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

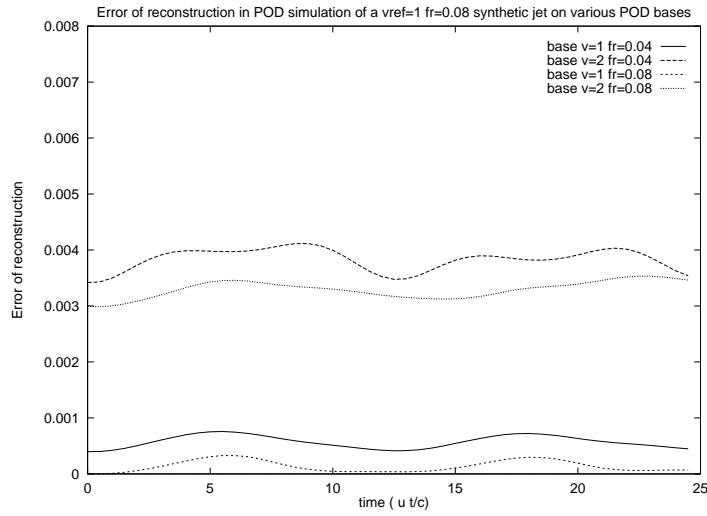


FIG. 33 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.08Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

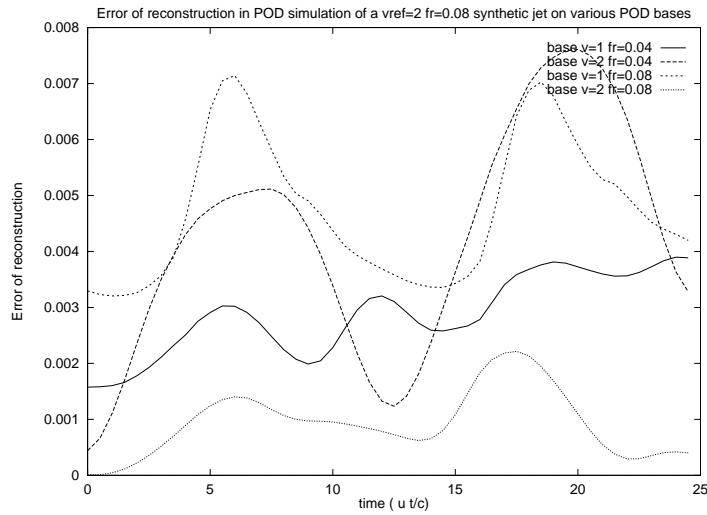


FIG. 34 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.08Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

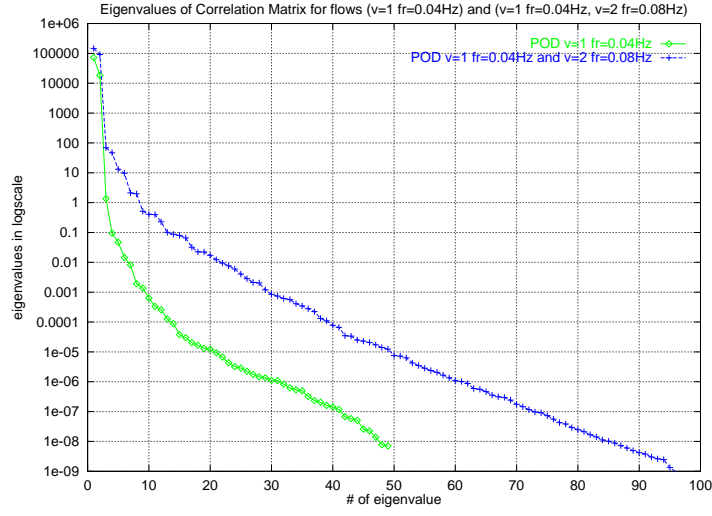


FIG. 35 – Valeurs propres de la matrice de corrélation temporelle du jet pulsé  $Re=125$  ( $V_{ref}=1$   $fr=0.04Hz$ ) et ( $V_{ref}=1$   $fr=0.04Hz$   $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.08Hz$ ), (chap. 7).

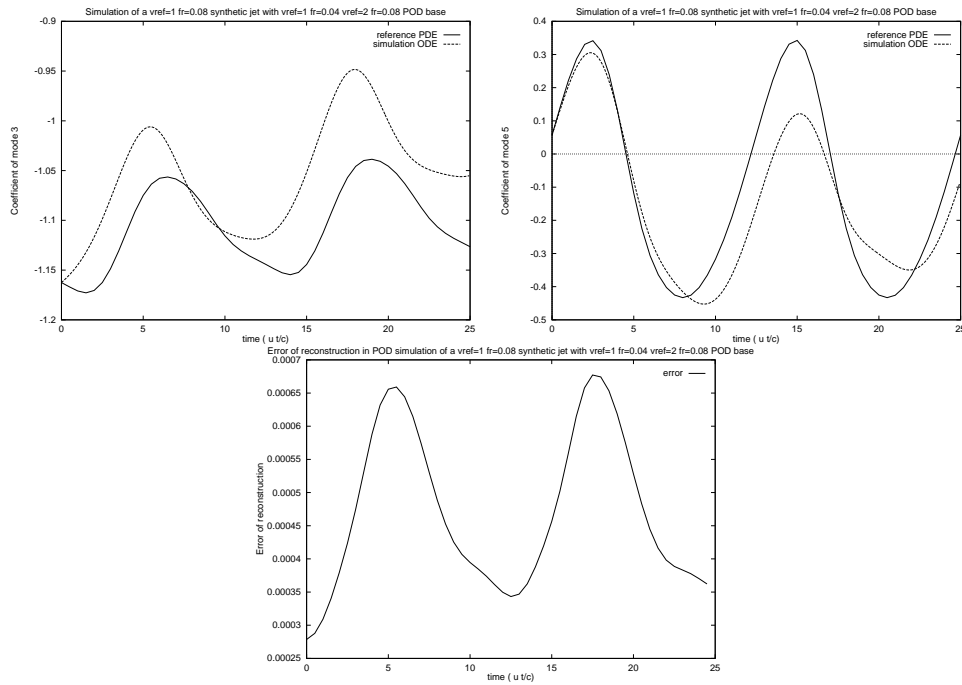


FIG. 36 – Comparaison E.D.P. et simulation P.O.D. avec 10 modes du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.08Hz$  avec une base calculée sur les écoulements  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$  et  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.08Hz$ , (chap. 7).



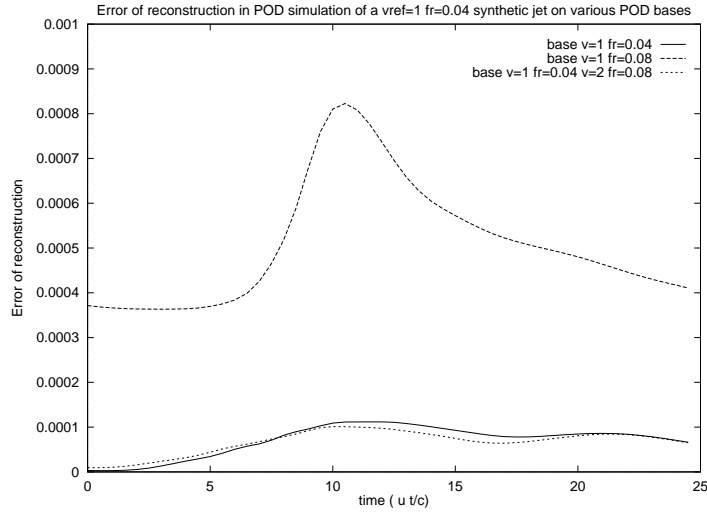


FIG. 37 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

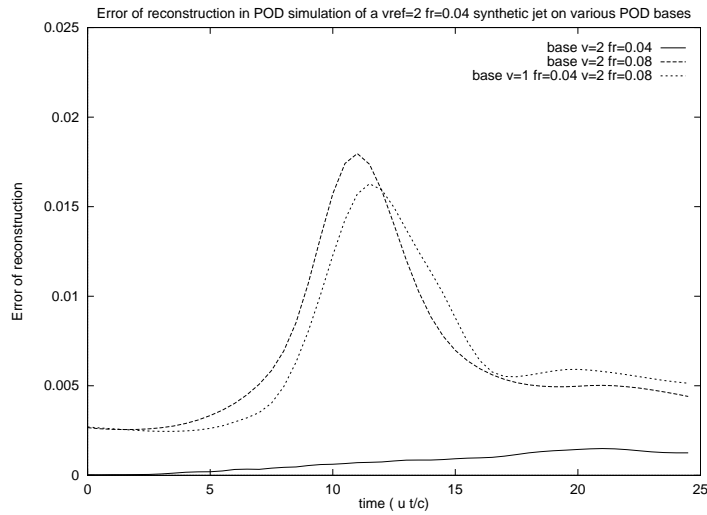


FIG. 38 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.04Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

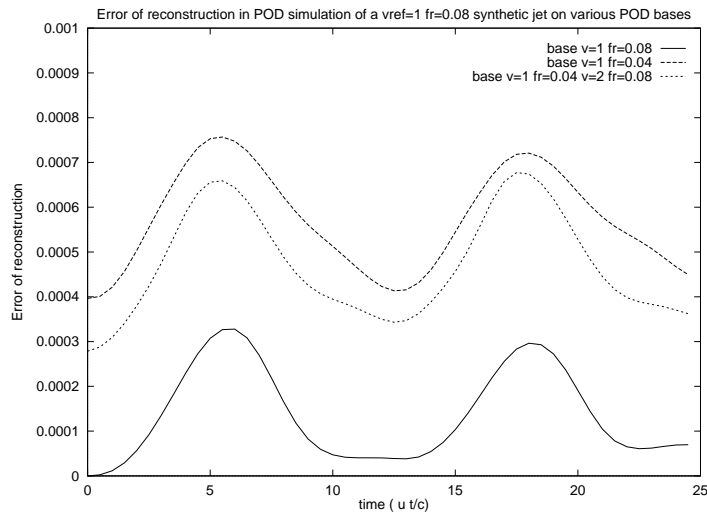


FIG. 39 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.08Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

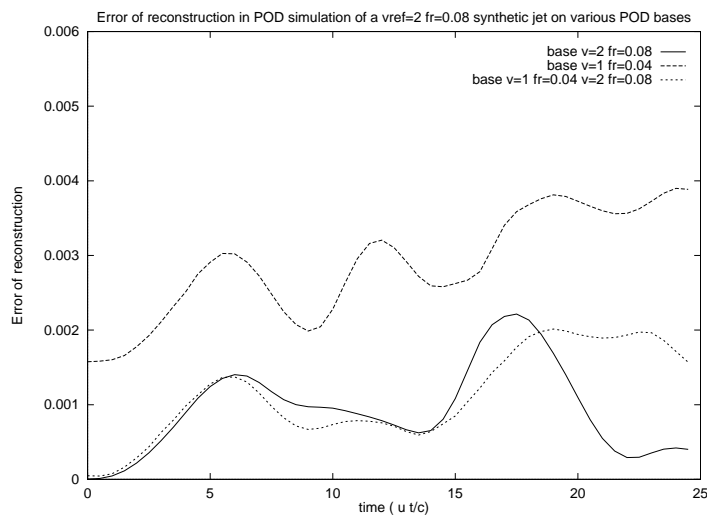


FIG. 40 – Erreur de reconstruction de la simulation P.O.D. du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=2$ ,  $fr=0.08Hz$  sur différentes bases, (chap. 7).

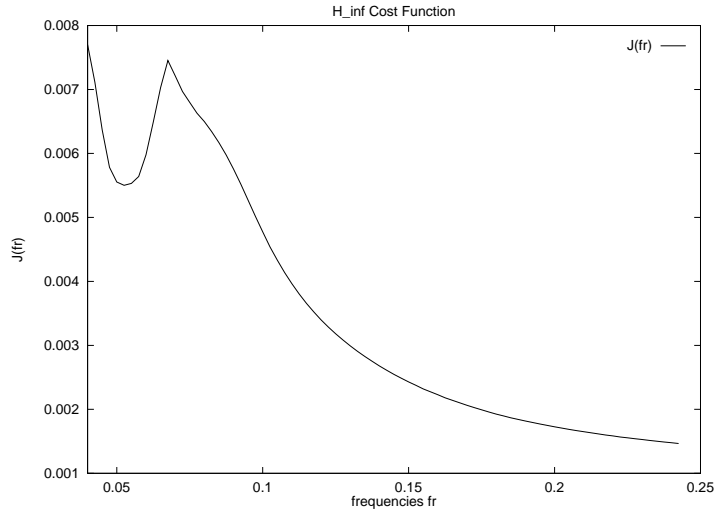


FIG. 41 – Fonction coût obtenue par simulation P.O.D. avec la base du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$  et  $fr=0.1Hz$ , (chapitre 8).

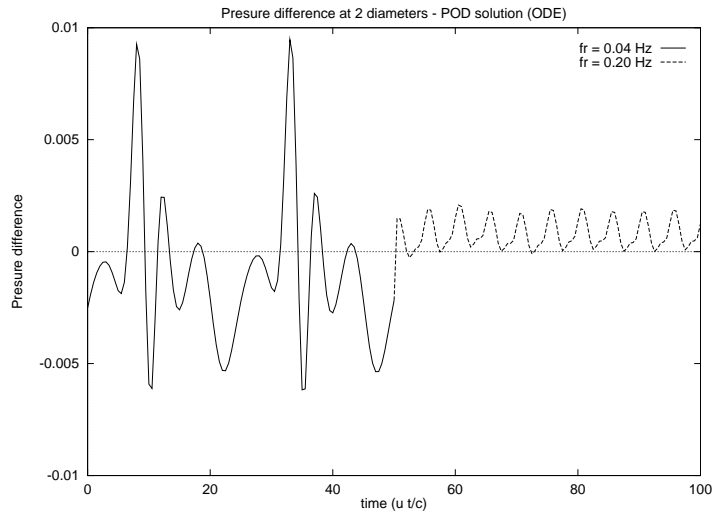


FIG. 42 – Difference de pression pour 2 fréquences, calcul par simulation P.O.D. avec la base du jet pulsé  $Re=125$ ,  $V_{ref}=1$ ,  $fr=0.04Hz$  et  $fr=0.1Hz$ , (chapitre 8).

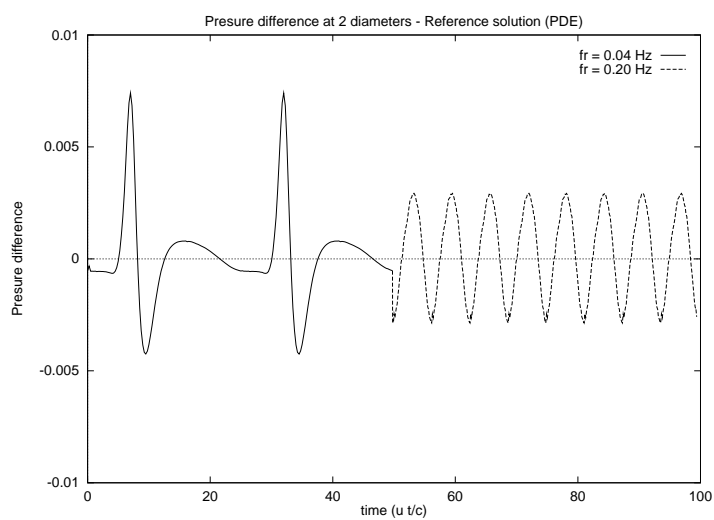


FIG. 43 – Difference de pression pour 2 fréquences, calcul par E.D.P., (chapitre 8).

## Références

- [1] **K.Y. Tang, W.R. Graham, J. Peraire**, Active Flow Control Using a Reduced Order Model and Optimum Control. AIAA paper 96-1946, 1996.
- [2] **G. Vigo**, The proper orthogonal decomposition applied to the unsteady compressible Navier Stokes equations. INRIA report 3385, March 1998.
- [3] **G. Vigo, A. Dervieux, M. Mallet, M. Ravachol and B. Stoufflet** Extension of methods based on the Proper Orthogonal Decomposition to the simulation of unsteady compressible Navier-Stokes flows. ECCOMAS 98, Wiley & Sons.
- [4] **A. Iollo, A. Dervieux, J-A Désidéri and S. Lanteri** Two Stable POD-based Approximations to the Navier-Stokes Equations. to appear in Computing and Visualization in Science.
- [5] **M. Amitay, B. L. Smith and A. Glezer**, Aerodynamic Flow Control Using Synthetic Jet Technology. AIAA paper 98-0208.
- [6] **F. Chalot, M. Mallet, M. Ravachol**, A Comprehensive Finite Element Navier-Stokes Solver for Low and High-Speed Aircraft Design *American Institute of Aeronautics and Astronautics*.
- [7] **L. D. Kral, J. F. Donovan, A. B. Cain, and A. W. Cary**, Numerical simulation of synthetic jet actuators. AIAA paper 97-1824.
- [8] **L. Prandtl**(1925), Investigation on turbulent flow. Z. Angewandte Mathematik und Mechanik, 5, 136.
- [9] **T. Cebeci and A. M. O. Smith**, Analysis of Turbulent Boundary Layers. Academic Press, New York, 1974.
- [10] **P. R. Spalart and S. R. Allmaras**, A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. AIAA paper 92-0439.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rappel sur les méthodes utilisant une base P.O.D.</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Extension à la turbulence</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Extension au cas des conditions aux limites de Dirichlet non homogène</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Simulation numérique d'un jet pulsé</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Approche P.O.D. pour les jets pulsés</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Robustesse de la P.O.D. pour les jets pulsés</b>	<b>21</b>
<b>8</b>	<b>Exemple de contrôle</b>	<b>22</b>
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>24</b>



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399